

Cálculo Numérico Computacional **Lista 08**  
 integral aproximada tarcsio@member.ams.org  
 T. Praciano-Pereira Dep. de Matemática

**alun@:**

Univ. Estadual Vale do Acaraú 5 de outubro de 2009

Por favor, observe a denominação correta do arquivo, veja na página da disciplina como fazer.

Data de entrega: 26 de Outubro de 2009, terça-feira

**palavras chave:** aproximação polinomial, campo vetorial, equações diferenciais ordinárias, integral aproximada, solução aproximada de equações diferenciais, valor médio integral, .

objetivo: As integrais devem ser calculadas aproximadamente usando interpolação polinomial de grau três. Faz parte da questão deixá-l@ livre para procurar a metodologia, como você teria que se haver na vida real.

Outro item desta lista consiste na solução aproximada de uma *equação diferencial*, há uma introdução no exercício.

Os dois assuntos correspondem aos capítulos 5,6 do meu livro de Cálculo Numérico Computacional que pode ser encontrado em

<http://www.editora.sobralmatematica.org>

Você também pode fazer uma leitura do meu livro de Equações Diferenciais com a observação de que ele ainda se encontra na classe de notas de aula, [9], use com cuidado, pode ser tóxico.

A bibliografia ao final contém referências que ultrapassam as necessidades desta lista, mas estão listadas para que você possa eventualmente, no futuro, ter acesso a elas em seu desenvolvimento pessoal. É preciso deixar isto claro para que você não interprete estas referências como uma forma de intimidá-l@ na solução dos exercícios ou dar uma aparência de supervalorização da lista.

### Exercícios 1 Aplicações da aproximação polinomial

1. Quantidade total e valor médio integral.

$$(a) \underline{(V)[ ](F)[ ]} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

Vale aproximadamente 1

$$(b) \underline{(V)[ ](F)[ ]} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

Vale aproximadamente 0

$$(c) \underline{(V)[ ](F)[ ]} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

Vale  $\sqrt{\pi}$

$$(d) \underline{(V)[ ](F)[ ]} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

Vale aproximadamente 3.00004167

2. Considere a função de distribuição gaussiana definida por

$$f(x) = \sqrt{\frac{0.2}{\pi}} e^{-0.2(x-3)^2}$$

(a)  $\underline{(V)[ ](F)[ ]}$  A média de  $g(x) = xf(x)$  no intervalo  $[-3, 9]$  aproximadamente 2

(b)  $\underline{(V)[ ](F)[ ]}$  A média de  $g(x) = xf(x)$  no intervalo  $[-3, 9]$  aproximadamente -2

(c)  $\underline{(V)[ ](F)[ ]}$  A média de  $g(x) = xf(x)$  no intervalo  $[-3, 9]$  aproximadamente 1

### Equações diferenciais

Você pode consultar o meu livro sobre Equações Diferenciais, com a observação de que ele ainda está muito mal escrito é uma versão da classe "notas de aula" [9]. Não faça uma leitura direta do livro, procure os tipos de equações mencionadas aqui. Não sugiro a leitura de outro livro sobre o assunto para que você não se perca! mas obviamente que esta é outra opção. O objetivo aqui é solução aproximada que é difícil encontrar na forma de livro.

Vou aplicar o método das tangentes para encontrar soluções aproximadas de equações diferenciais, este método é geralmente conhecido como método de Euler. Há dois tipos de equações a que este método se aplica facilmente (com bons resultados)

- as equações do tipo  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ ;
- as equações diferenciais exatas

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

Vou tratar destes dois tipos de equações aqui.

metodo: Para cada tipo de equação vamos fazer um tutorial passando por algumas experiências e seguindo para o desenvolvimento computacional.

Em cada grupo de questões um pequeno texto-resumo da teoria antecede os quesitos. Há dois grupos de questões nesta lista.

Depois de cada grupo de questões um pequeno texto indica aplicações para o método.

Campos vetoriais descrevem o fluxo que movem partículas num fluido, por exemplo, as moléculas de água num rio sobre o qual se pense construir uma ponte, ou do vento sobre uma região onde se espera coletar energia aeólica.

Em cada ponto da região temos vetores indicando o gradiente do campo, o vetor das derivadas parciais. Malhas mais finas ou mais grossas permitem uma visualização do campo de forças e a resolução, em geral, tem que ser decidida experimentalmente, este é um dos objetivos desta lista. Veja um exemplo na figura (1) página 4,

que é um campo vetorial gerado pelo programa `campo_vet.c` que você pode encontrar aqui, [8, programas].

3.  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$  Considere a expressão

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = x^2 + xy + y^2 \quad (1)$$

e a malha de norma

$$\Delta x = 1 ; \Delta y = 1$$

no retângulo

$$[-3, 3] \times [-3, 3]$$

- (a) Em cada nó desta malha desenhe um vetor tangente de módulo

$$\frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{2}$$

- (b) Coloque no arquivo `''dados''` os pares de pontos que determinam os vetores tangentes obtidos e visualize o resultado com `gnuplot` usando o comando

```
plot ''dados'' with lines
```

separando cada par de pontos com uma linha em branco (caso contrário `gnuplot` vai ligar todos os pontos).

- (c) Faça um programa que crie o arquivo `''dados''` e chamando `gnuplot` para visualizar o campo vetorial, não se esqueça de fazer o programa separar os pontos com linha em branco.

- (d) O resultado desta experiência produz uma visualização do fluxo de

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + xy + y^2$$

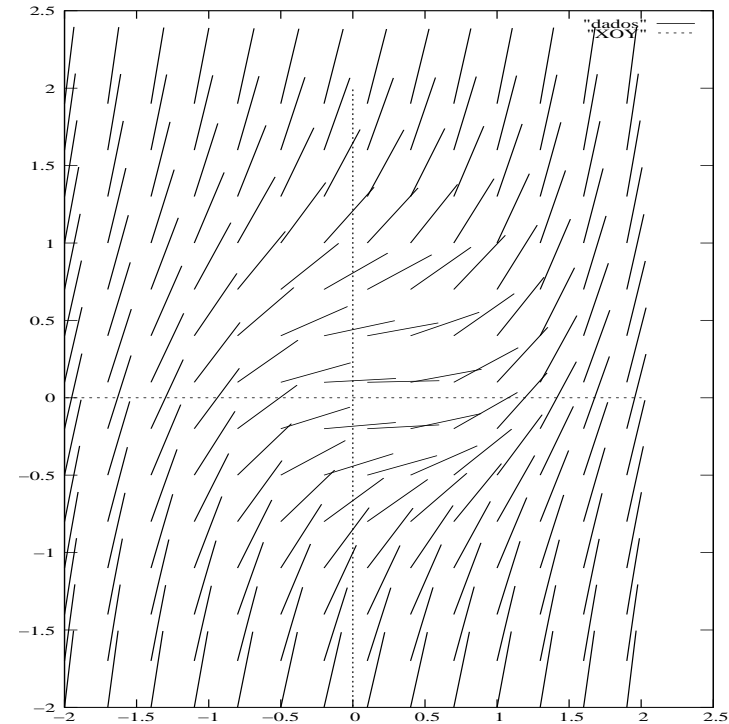


Figura 1: Campo vetorial - vetores tangentes ao fluxo

na região considerada. Esta visualização pode ficar anulada tanto por uma precisão exagerada ou pobre, (uso de  $\Delta x, \Delta y$  muito pequenos ou muito grandes. Estude isto fazendo o gráfico com diferentes normas para a malha.

4. Refaça a questão anterior com

$$f(x, y) = \frac{y + 3}{x - 3} \quad (2)$$

na região  $[-10, 10]$ . Discuta o resultado.

exemplo de aplicação em vez de termos a expressão algébrica  $f(x, y)$  na equação (1) podemos ter um arquivo semelhante ao `''dados''` obtido por sensores. O campo vetorial resultante descreve aproximadamente o fluxo

de um fenômeno no retângulo observado. É o caso do fluxo de um rio, para determinarmos a melhor localização de uma ponte, dos pilares da ponte, embasamento etc... ou fluxo aélico para distribuição de cata-ventos em uma região.

5. Uma equação diferencial da forma

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (3)$$

se diz exata se houver uma função

$$z = F(x, y) \quad (4)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P ; \frac{\partial F}{\partial y} = Q \quad (5)$$

e isto pode ser testado com a igualdade (do meio na expressão):

$$\frac{\partial F^2}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial F^2}{\partial x \partial y} \quad (6)$$

de acordo com um teorema do Cálculo que estabelece que as derivadas parciais mistas de uma função diferenciável, são iguais, ver [7, página 27], Teorema de Clairaut.

As soluções de uma equação diferencial exata são as curvas de nível

$$F(x, y) = c \quad (7)$$

para constantes  $c$  admissíveis.

Uma solução aproximada pode ser uma poligonal cujos lados são sucessivamente obtidos com a equação da reta tangente em um ponto de precisão

$$(a, b),$$

condição inicial, que pode ser deduzida da equação ou obtida experimentalmente,  $F(a, b) = c$ , seguida dos lados (da poligonal) obtidos a partir de novas condições iniciais

$$(a_0, b_0) = (a, b) \quad (8)$$

$$(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n) \quad (9)$$

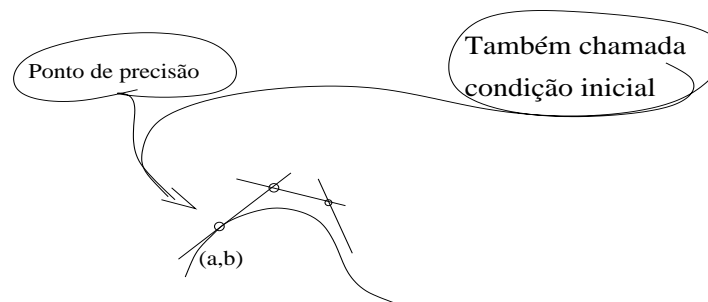
cada condição inicial  $(a_i, b_i)$  sendo tomada na reta encontrada pela condição inicial anterior  $(a_{i-1}, b_{i-1})$ .

Você pode ver na figura (2) página 6, uma poligonal - solução artística - feita pelo autor manualmente, ou uma solução computacional feita com o programa `implicita.c` na figura (3) página 7, Você pode encontrar o programa `implicita.c` em [8, programas].

Considere a equação diferencial exata

$$2xy^2 dx + 2x^2 y dy = 0 \quad (10)$$

e a condição inicial  $(a, b) = (-1, 1)$



### Uma poligonal com tres lados

Figura 2: Uma poligonal com três lados - solução aproximada

- Construa uma poligonal com cinco lados, considerando inicialmente a reta que passa no ponto  $(a, b)$  usando a equação diferencial para definir o lado inicial e, em cada lado escolhendo um ponto "proximo" como nova condição inicial onde traçar novo segmento de reta tangente.
- Coloque os dados no arquivo ''dados'' e usando o comando `plot ''dados'' with lines` obtenha a poligonal-solução. Observe, não separe os pontos com linhas em branco para que `gnuplot` trace uma única poligonal.
- Faça um programa que produza uma poligonal com lados medindo  $\delta$  de sua escolha (coloque os dados no arquivo ''dados'' e use `gnuplot` para traçar a poligonal.

6. Resolva aproximadamente (gráfico) a equação diferencial exata

$$x dx + y dy = 0 ; (a, b) = (0, 2) \quad (11)$$

solução exata é um círculo.

exemplos de aplicação você pode colocar um satélite em órbita com este método e com uma equação parecida com a equação (11). Este método também serve para construir pilotos automáticos para controlar navegação. Pode também ser usado para determinar o melhor leito para uma estrada numa região acidentada. São todos exemplos de curva de nível.

7. Questão obrigatória Faça uma análise crítica dos objetivos e do método deste tutorial. Você não receberá nota por sua opinião mas é obrigado a emití-la, em outras palavras, você não corre riscos de perder pontos se

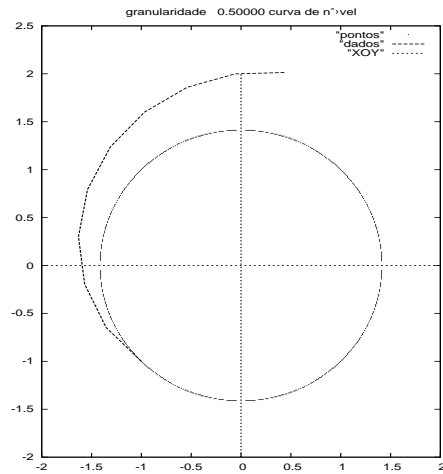


Figura 3: Uma poligonal feita com o programa `implicita.c`

manifestando negativamente sobre a disciplina ou sobre os métodos usados pelo professor. Observe também que a sua análise força-l@-á a refletir sobre sobre o assunto estudado.

## Referências Bibliográficas

- [1] David I. Bell, Landon Curt Noll and Ernest Bowen  
*calc - uma linguagem inerpretada com a sintaxe da linguagem C*  
<http://www.isthe.com/chongo/tech/comp/calc/>
- [2] *gnuplot, um programa para fazer gráficos com alguma capacidade algébrica e de programação*  
<http://gnuplot.info>
- [3] Erika Lindemann *Writing to learn*  
[http://www.calculo-numeric.sobralmatematica.org/textos/writing\\_to\\_learn\\_2p.pdf](http://www.calculo-numeric.sobralmatematica.org/textos/writing_to_learn_2p.pdf)
- [4] *Um pacote para cálculo numérico*  
<http://www.gnu.org/software/octave/>
- [5] *Um pacote para cálculo numérico*  
 Scilab grupe - INRIA <http://www.scilab.org>
- [6] Praciano-Pereira, T. *Cálculo Numérico Computacional* T. Praciano-Pereira edição eletrônica preliminar, procure *textos*, na página da disciplina <http://calculo-numeric.sobralmatematica.org/>  
 Versão em uma página por folha A4 `ananu00.pdf` ou versão em duas página por folha A4, `ananu00_2p.pdf`
- [7] Ana Paula Boris  
*Teorema da Função Implícita e equações diferenciais exatas*  
 Monografias da Sobral Matematica - 2006  
<http://www.sobralmatematica.org>
- [8] Praciano-Pereira, T *Programas para Cálculo Numérico*  
<http://www.4shared.com/dir/3801087/2fa7cabd/programas.html>  
<http://www.calculo-numeric.sobralmatematica.org/programas>  
 Procure *programas*, na página da disciplina  
<http://calculo-numeric.sobralmatematica.org/>

- [9] Praciano-Pereira, T *Equações diferenciais - Introdução*  
<http://www.edo.sobralmatematica.org/textos>
- [10] Programa `sistema` um algoritmo para calcular e fazer o gráfico de polinômio dadas quatro condições.  
Procure “sistema” no link *programas*, na página da disciplina.  
<http://calculo-numericosobralmatematica.org/>
- [11] *A enciclopédia livre na Internet - Wikipédia*  
<http://encyclopedia.thefreedictionary.com/>  
<http://en.wikipedia.org/>  
<http://pt.wikipedia.org>