Calculo numérico **Lista número 06**
Integral de Linha tarcisio.praciano@gmail.com
T. Praciano-Pereira **Dep. de Computação**
alun@:
Univ. Estadual Vale do Acaraú 16 de maio de 2013
www.calculo-numerico.sobralmatematica.org
Documento produzido com LaTeX Debian/Gnu/Linux

0.2 Informações

O programa `DiferencialExata.py` foi usado na confeção desta lista e ele se encontram na página da disciplina no link "programas". Também usei o script do `gnuplot` que aparece na questão 5 para simular valores sobre curvas.

Data da entrega da lista: dia 13 de maio, segunda-feira.

Exercícios 1 (Integral de linha) *Teorema de Green*

0.2.1 Objetivo

Teorema de Green

Palavras chave: *campo conservativo, campo escalar, campo vetorial, diferencial exato, integral de linha, integral múltipla*

1. *Derivadas parciais*

   (a) *(V)[ ](F)[ ] Sendo $F(x,y) = x\cos(y)$ a jacobiana de F é*

   $$\nabla(F) = \begin{pmatrix} \cos(y) & x\sin(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x & F_y \end{pmatrix} \tag{1}$$

   (b) *(V)[ ](F)[ ] Sendo $F(x,y) = x\cos(y)$ a jacobiana de F é*

   $$\nabla(F) = \begin{pmatrix} \cos(y) & -x\sin(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x & F_y \end{pmatrix} \tag{2}$$

   (c) *(V)[ ](F)[ ] Sendo$F(x,y) = (1, xy, xy)$ a jacobiana de F é*

   $$J(F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & x \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{1,x} & F_{1,y} \\ F_{2,x} & F_{2,y} \\ F_{3,x} & F_{3,y} \end{pmatrix} \tag{3}$$

   (d) *(V)[ ](F)[ ] Sendo $F(x,y,z) = xcos(y) + zcos(x)$ que é um* campo escalar, *o gradiente de $F = \nabla(F)$ é a matriz formada por sua derivadas parciais*

$$\begin{cases} \nabla(F) = J(F) = \begin{pmatrix} \cos(y) - z\sin(x) & -x\sin(y) & \cos(x) \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} F_x & F_y & F_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \end{pmatrix} \end{cases} \tag{4}$$

   é um campo vetorial.

   (e) *(V)[ ](F)[ ] Sendo $F(x,y,z) = (y,z,x)$ que é um* campo vetorial, *a jacobiana de F é*

   $$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

   e $\det(J(F)) = 1$

2. *Derivadas e campo vetorial*

   (a) *(V)[ ](F)[ ] Se $f(x,y) = xy$ então f é um função escalar de variável vetorial e pode ser uma derivada.*

   (b) *(V)[ ](F)[ ]*Potencial *Como $f(x,y) = xy$ é um função escalar de variável vetorial,* um campo escalar *então f não pode ser uma derivada. Ela mede (ou descreve) uma quantidade, é um* potencial.

   (c) *(V)[ ](F)[ ]*Campo vetorial *Sendo $F(x,y,z) = (x,y,xy,z)$, então F é um* campo vetorial *e* pode ser *uma derivada. Se for uma derivada de uma função continuamente diferenciável, as derivadas mistas serão iguais (teste!).*

   (d) *(V)[ ](F)[ ]* Campo vetorial *Sendo $F(x,y,z) = (x,y,xy,z)$, então F é um* campo vetorial *mas não é uma derivada porque, como tem três variáveis teria que ter apenas três derivadas parciais como coordenadas na imagem.*

   (e) *(V)[ ](F)[ ] A função $f(x) = (x, 2y)$ está mal definida.*

3. *Circúito fechado*

   Considere as curvas definidas pelas equações em algum intervalo de parametrização a ser determinado.

   $$\alpha_1 = (x_1(t), y_1(t)) = (t, 9 - t^2); \tag{6}$$
   $$\alpha_2 = (x_2(t), y_2(t)) = (t, t^2 - 4); \tag{7}$$
   $$\alpha_3 = (x_3(t), y_3(t)) = (t, 23/4 - t^2/2); \tag{8}$$
   $$\alpha_4 = (x_4(t), y_4(t)) = (t, -2t^2 + 31/2); \tag{9}$$

   (a) *(V)[ ](F)[ ] As curvas α_1, α_2 se encontram no ponto $A = (\sqrt{\frac{13}{2}}, \frac{5}{2})$.*

   (b) *(V)[ ](F)[ ] As curvas α_1, α_2 se encontram no ponto $B = (-\sqrt{\frac{13}{2}}, \frac{5}{2})$.*

(c) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *Como a curva α_1 passa nos pontos A, B, definidos nos itens anteriores, então podemos redefinir α_1 como*

$$\alpha_1(t) = (x_1(t), y_1(t)) = (t, 9 - t^2); t \in [-r, r]; r = \sqrt{\frac{13}{2}}$$

e diremos que α_1 é <u>um</u> caminho <u>entre</u> os pontos A, B.

(d) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *Como a curva α_2 passa nos pontos A, B definidos nos itens anteriores então podemos redefinir α_2 como*

$$\alpha_2(t) = (x_2(t), y_2(t)) = (t, t^2 - 4); t \in [r, -r]; r = \sqrt{\frac{13}{2}}$$

e diremos que α_2 é <u>um</u> caminho <u>entre</u> os pontos A, B.

(e) <u>(V)[ ](F)[ ]curva fechada</u> *Como as curvas α_1, α_2 passam nos pontos A, B definidos nos itens anteriores então podemos <u>definir</u> α como*

$$\alpha(t) = \begin{cases} t \in [-r, r]; \ \alpha_1(t); \\ t \in [r, -r]; \ \alpha_2(t); \end{cases} ; r = \sqrt{\frac{13}{2}} \tag{10}$$

e diremos que α é <u>um circúito fechado</u> começando em A e terminando em A.

<u>**observação:**</u> *Aqui usei uma forma pouco usual de parametrização, usando o intervalo $[r, -r]$, em vez disto, o que se faz em geral é trocar o sinal do parâmetro:*

$$t \in [-r, r]; \alpha_2(-t)$$

com isto inverte-se o sentido do percurso da curva (troca-se o sinal da derivada).

4. <u>*Circúito fechado*</u> *Entender curvas e suas parametrizações.*

Considere as curvas definidas pelas equações em algum intervalo de parametrização a ser determinado.

$$\alpha_1 = (x_1(t), y_1(t)) = (t, 9 - t^2); \tag{11}$$
$$\alpha_2 = (x_2(t), y_2(t)) = (t, t^2 - 4); \tag{12}$$
$$\alpha_3 = (x_3(t), y_3(t)) = (t, 23/4 - t^2/2); \tag{13}$$
$$\alpha_4 = (x_4(t), y_4(t)) = (t, -2t^2 + 31/2); \tag{14}$$

(a) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *As curvas α_3, α_4 se encontram no ponto $A = (\sqrt{\frac{13}{2}}, \frac{5}{2})$.*

(b) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *As curvas α_3, α_4 se encontram no ponto $B = (-\sqrt{\frac{13}{2}}, \frac{5}{2})$.*

(c) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *Como a curva α_3 passa nos pontos A, B definidos nos itens anteriores então podemos <u>**redefinir**</u> α_3 como*

$$\alpha_3(t) = (x_1(t), y_1(t)) = (t, 23/4 - t^2/2); t \in [-r, r]; \ r = \sqrt{\frac{13}{2}}$$

e diremos que α_3 é <u>um</u> caminho <u>entre</u> os pontos A, B, (vai no sentido de B para A).

(d) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *Como a curva α_4 passa nos pontos A, B definidos nos itens anteriores então podemos <u>**redefinir**</u> α_4 como*

$$\alpha_4(t) = (x_1(t), y_1(t)) = (t, -2t^2 + 31/2); t \in [r, -r]; r = \sqrt{\frac{13}{2}}$$

e diremos que α_4 é <u>um</u> caminho <u>entre</u> os pontos A, B, (vai no sentido de A para B).

(e) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *Como as curvas α_3, α_4 passam nos pontos A, B definidos nos itens anteriores então podemos definir β como*

$$\beta(t) = \begin{cases} t \in [-r, r]; \alpha_3(t); \\ t \in [r, -r]; \alpha_4(t); \end{cases} ; r = \sqrt{\frac{13}{2}}; \tag{15}$$

e diremos que β é <u>um circúito fechado</u> começando em A e terminando em A.

<u>**observação:**</u> *Aqui usei uma forma pouco usual de parametrização, usando o intervalo $[r, -r]$, em vez disto, o que se faz em geral é trocar o sinal do parâmetro:*

$$t \in [-r, r]; \alpha_4(-t)$$

com isto inverte-se o sentido do percurso da curva (troca-se o sinal da derivada).

5. <u>*Circúito fechado*</u> *Objetivo usando* `gnuplot` *para entender curvas e suas parametrizações.*

Considere as curvas definidas pelas equações em algum intervalo de parametrização a ser determinado.

$$\alpha_1 = (x_1(t), y_1(t)) = (t, 9 - t^2); \tag{16}$$
$$\alpha_2 = (x_2(t), y_2(t)) = (t, t^2 - 4); \tag{17}$$
$$\alpha_3 = (x_3(t), y_3(t)) = (t, 23/4 - t^2/2); \tag{18}$$
$$\alpha_4 = (x_4(t), y_4(t)) = (t, -2t^2 + 31/2); \tag{19}$$

(a) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *Os comandos do* `gnuplot`

```
pow(x,n)= x**n;
set parametric
x_1(t) = t; y_1(t) =  9 - pow(t,2);
x_2(t)= t; y_2(t) =  pow(t,2) - 4;
x_5(t)= t; y_5(t) = 2.5
plot x_1(t) , y_1(t), x_2(t) , y_2(t),   x_5(t), y_5(t) ;
pause -2 "Aperte enter para terminar ";
```

mostram o gráfico das curvas α_1, α_2.

(b) *(V)[ ](F)[ ]* *Os comandos do* `gnuplot`

```
pow(x,n)= x**n;
set parametric
r = sqrt(13/2.0);
set trange [-r:r]
x_3(t) = t; y_3(t) = 23/4.0 - pow(t,2)/2.0;
x_4(t) = t; y_4(t) = 31/2.0 - 2*pow(t,2);
x_5(t)= t; y_5(t) = 2.5;
plot  x_3(t), y_3(t), x_4(t), y_4(t),   x_5(t), y_5(t) ;
pause -2 "Aperte enter para terminar ";
```

mostram o gráfico das curvas α_3, α_4 sendo então possível definir o circúito (curva fechada) γ com as equações

$$\gamma(t) = \begin{cases} t \in [-r:r); \ \alpha_3(t); \\ t \in [r:-r); \ \alpha_4(t); \end{cases} ; \ r = \sqrt{13/2.0}; \tag{20}$$

é uma curva fechada que passa nos pontos $A = (r, \frac{5}{2}), B = (-r, \frac{5}{2})$ e qualquer um deles pode ser definido como o ponto inicial da curva γ.

observação: *Aqui usei uma forma pouco usual de parametrização, usando o intervalo $[r, -r]$, em vez disto, o que se faz em geral é trocar o sinal do parâmetro:*

$$t \in [-r, r]; \alpha_4(-t)$$

com isto inverte-se o sentido do percurso da curva (troca-se o sinal da derivada).

(c) *(V)[ ](F)[ ]* *Os comandos do* `gnuplot`

```
pow(x,n)= x**n;
set parametric
r = sqrt(13/2.0);
set trange [-r:r]
x_1(t) = t; y_1(t) = 9 - pow(t,2);
x_4(t) = t; y_4(t) = 31/2.0 - 2*pow(t,2);
x_5(t)= t; y_5(t) = 2.5;
plot  x_1(t), y_1(t), x_4(t), y_4(t),   x_5(t), y_5(t) ;
pause -2 "Aperte enter para terminar ";
```

mostram o gráfico das curvas α_1, α_4 sendo então possível definir o circúito (curva fechada) γ com as equações

$$\gamma(t) = \begin{cases} t \in [-r:r); \ \alpha_1(t); \\ t \in [r:-r); \ \alpha_4(t); \end{cases} ; r = \sqrt{13/2.0}; \tag{21}$$

é uma curva fechada que passa nos pontos $A = (r, \frac{5}{2}), B = (-r, \frac{5}{2})$ e qualquer um deles pode ser definido como o ponto inicial da curva γ.

observação: *Aqui usei uma forma pouco usual de parametrização, usando o intervalo $[r, -r]$, em vez disto, o que se faz em geral é trocar o sinal do parâmetro:*

$$t \in [-r, r]; \alpha_4(-t)$$

com isto inverte-se o sentido do percurso da curva (troca-se o sinal da derivada).

(d) *(V)[ ](F)[ ]* *Os comandos do* `gnuplot`

```
pow(x,n)= x**n;
set parametric
r = sqrt(13/2.0);
set trange [-r:r]
x_1(t) = t; y_1(t) = 9 - pow(t,2);
x_3(t) = t; y_3(t) = 23/4.0 - pow(t,2)/2.0;
plot  x_1(t), y_1(t), x_4(t), y_4(t)
```

mostram o gráfico das curvas α_1, α_3 sendo então possível definir o circúito (curva fechada) γ com as equações

$$\gamma(t) = \begin{cases} t \in [-r, r); \ \alpha_1(t); \\ t \in [r, -r); \ \alpha_3(t); \end{cases} ; \ r = \sqrt{13/2.0}; \tag{22}$$

é uma curva fechada que passa nos pontos $A = (r, \frac{5}{2}), B = (-r, \frac{5}{2})$ e qualquer um deles pode ser definido como o ponto inicial da curva γ.

observação: *Aqui usei uma forma pouco usual de parametrização, usando o intervalo $[r, -r]$, em vez disto, o que se faz em geral é trocar o sinal do parâmetro:*

$$t \in [-r, r]; \alpha_3(-t)$$

com isto inverte-se o sentido do percurso da curva (troca-se o sinal da derivada).

(e) *(V)[ ](F)[ ]* *Os comandos do* `gnuplot`

```
pow(x,n)= x**n;
set parametric
r = sqrt(13/2.0);
set trange [-r:r]
x_2(t) = t; y_2(t) =  pow(t,2) - 4 pow(t,2);
x_4(t) = t; y_3(t) = - pow(t,2) + 31/2.0;
plot  x_2(t), y_2(t), x_4(t), y_4(t)
```

mostram o gráfico das curvas α_2, α_4 sendo então possível definir o círcúito (curva fechada) γ com as equações

$$\gamma(t) = \begin{cases} t \in [-r:r); \ \alpha_2(t); \\ t \in [r:-r); \ \alpha_4(t); \end{cases} ; \ r = \sqrt{13/2.0}; \tag{23}$$

é uma curva fechada que passa nos pontos $A = (r, \frac{5}{2}), B = (-r, \frac{5}{2})$ *e qualquer um deles pode ser definido como o ponto inicial da curva* γ.

observação: *Aqui usei uma forma pouco usual de parametrização, usando o intervalo* $[r, -r]$, *em vez disto, o que se faz em geral é trocar o sinal do parâmetro:*

$$t \in [-r, r]; \alpha_4(-t)$$

com isto inverte-se o sentido do percurso da curva (troca-se o sinal da derivada).

6. *Integral de linha*

Considere o campo vetorial

$$(x, y) \mapsto (P(x, y), Q(x, y)); \tag{24}$$
$$(P(x, y), Q(x, y)) = (y, -x); \tag{25}$$

e as curvas

$$\alpha_1 = (x_1(t), y_1(t)) = (t, 9 - t^2); \tag{26}$$
$$\alpha_2 = (x_2(t), y_2(t)) = (t, t^2 - 4); \tag{27}$$
$$\alpha_3 = (x_3(t), y_3(t)) = (t, 23/4 - t^2/2); \tag{28}$$
$$\alpha_4 = (x_4(t), y_4(t)) = (t, -2t^2 + 31/2); \tag{29}$$

que se encontram todas nos pontos $A = (\sqrt{\frac{13}{2}}, \frac{5}{2})$ *ou no ponto* $B = (-\sqrt{\frac{13}{2}}, \frac{5}{2})$.

O símbolo $\oint$ *representa uma integral que está sendo calculada ao longo de uma curva e é chamado de "integral de linha". O seu valor se reduz a uma integral comum do Cálculo I quando escrevermos uma parametrização para a curva sobre um intervalo* $[a, b]$.

(a) *(V)[ ](F)[ ]* $\oint_{\alpha_1} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{A_1}^{B_1} (P(x_1, y_1)dx_1 + Q(x_1, y_1)dy_1)\, dt$ *em que* $[A_1, B_1]$ *é um intervalo de parametrização da curva* α_1.

(b) *(V)[ ](F)[ ]* $\oint_{\alpha_1} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{A_1}^{B_1} (P(x_1, y_1)dx_1 + Q(x_1, y_1)dy_1)\, dt$ *em que* $[A_1, B_1]$ *é um intervalo de parametrização da curva* α_1, *a menos do sinal. Depende do sentido do percurso.*

(c) *(V)[ ](F)[ ]* $\oint_{\alpha_1} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{A_1}^{B_1} P(x_1, y_1)dx_1 + Q(x_1, y_1)dy_1 dt = \pm 13$

(d) *(V)[ ](F)[ ]* $\oint_{\alpha_1} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{A_1}^{B_1} P(x_1, y_1)dx_1 + Q(x_1, y_1)dy_1 dt \approx \pm 13.4$

(e) *(V)[ ](F)[ ]* $\oint_{\alpha_1} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{A_1}^{B_1} P(x_1, y_1)dx_1 + Q(x_1, y_1)dy_1 dt \approx \pm 56.9390587745$

7. *Este item está baseado no programas* `DiferencialExata.py` *que se encontram no link "programas" da página da disciplina. A leitura e compreensão deste programa facilita a resolução da questão, mas não é necessária. Esta questão foi feita com auxílio deste programa e dum script do* `gnuplot` *que se encontra na questão 5 desta lista.*

Considere o campo vetorial $(P(x, y), Q(x, y)) = (y/2, -x/2)$

Cálculo Numérico Computacional

(a) *(V)[ ](F)[ ]* (P, Q) *é uma derivada porque*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

atendendo assim à condição do teorema de Clairot-Schwarz para derivadas mistas.

(b) *(V)[ ](F)[ ] A integral de* $Pdx + Qdy$ *sobre o círculo unitário*

$$(\cos(t), \sin(t)); t \in [0, 2\pi]$$

é nula.

(c) *(V)[ ](F)[ ] A integral de* $Pdx + Qdy$ *sobre o círculo unitário*

$$(\cos(t), \sin(t)); t \in [0, 2\pi]$$

é vale $\pm\pi$.

(d) *(V)[ ](F)[ ] A integral*

$$\int_D\int \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy$$

vale π.

(e) *(V)[ ](F)[ ] A integral*

$$\int_D\int \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy$$

vale 0.

8. *Derivada de um campo Vetorial*
   $F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$.
   (a) *(V)[ ](F)[ ]* $J(F) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$
   (b) *(V)[ ](F)[ ]* $J(F) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{n\times m}$
   (c) *(V)[ ](F)[ ]* $J(F) : \mathbf{R}^{n+m} \to \mathbf{R}^m$
   (d) *(V)[ ](F)[ ]* $J(F) : \mathbf{R}^{n+m} \to \mathbf{R}^{n\times m}$
   (e) *(V)[ ](F)[ ]* $J(F) : \mathbf{R}^{n+m} \to \mathbf{R}^{n+m}$
9. *Cálculo Numérico Computacional*

$$F(r,\theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = (x,y);$$

é a mudança de coordenadas cartesianas *para* coordenadas polares.

(a) *(V)[ ](F)[ ] A derivada implicita de F é*

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix} \tag{30}$$

(b) *(V)[ ](F)[ ] A derivada implicita de F é*

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \end{pmatrix} \tag{31}$$

(c) *(V)[ ](F)[ ]*
A derivada implicita de F é

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix} \tag{32}$$

(d) *(V)[ ](F)[ ]*

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \end{pmatrix} \tag{33}$$

(e) *(V)[ ](F)[ ]*

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \end{pmatrix} \tag{34}$$

10. *Equação diferencial Descobrindo qual é a função que corresponde a uma derivada.*

(a) *(V)[ ](F)[ ] Dada a derivada (verfique se de fato é uma derivada)*

$$J(F) = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ y^2 & 2xy \end{pmatrix} \tag{35}$$

então $F(x,y) = 2xy$.

(b) *(V)[ ](F)[ ] Dada a derivada (verfique se de fato é uma derivada)*

$$\begin{pmatrix} 2y & 2x \end{pmatrix} \tag{36}$$

então $F(x,y) = 2xy + C$ *em que* C *é uma constante arbitrária.*

(c) *(V)[ ](F)[ ] Dada a derivada (verfique se de fato é uma derivada)*

$$\begin{pmatrix} 2x+2y & 2x+2y \end{pmatrix} \tag{37}$$

então $F(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 - 4$.

(d) *(V)[ ](F)[ ] Dada a derivada (verfique se de fato é uma derivada)*

$$\begin{pmatrix} 2x+2y & 2x+2y \end{pmatrix} \tag{38}$$

então $F(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 + C$ *em que* C *é uma constante arbitrária.*

(e) *(V)[ ](F)[ ] Dada a derivada (verfique se de fato é uma derivada)*

$$\begin{pmatrix} 2y & 2x \end{pmatrix} \tag{39}$$

então $F(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 + C$ *em que* C *é uma constante arbitrária.*