Cálculo Numérico Computacional | **Lista 06**
valor médio, interpolação polinomial | tarcisio@member.ams.org
T. Praciano-Pereira | **Dep. de Computação**

alun@:

Univ. Estadual Vale do Acaraú	10 de setembro de 2009
Documento processado com LaTeX	sis. op. Debian/Gnu/Linux

0.1 Informações

Se você quiser entregar o trabalho eletrônicamente, envie o arquivo para o meu e-mail ou entregue em CD na secretária do Curso de Computação. Data de entrega desta lista: terça-feira, dia 15 de Setembro de 2009, até 22:00 h. Por favor, renove sua atenção sobre os nomes dos arquivos dos trabalhos.

0.2 Orientação

objetivo: Construir programas para calcular os coeficientes de um polinômio, dadas algumas condições. Depois vamos fazer uso desta interpolação para análises de dados. Este é o projeto de trabalho.

Nesta lista você vai ver o valor aproximado de integrais, interpolação polinomial não clássica, usando polinômios por pedaços do terceiro grau (quase-splines) a integral de uma função cujo valor exato nós podemos encontrar, desta forma você terá uma avaliação do modelo que estamos propondo os quase-splines. *Vou também discutir em aula o programa* `riemann.cc` *que calcula integrais aproximadamente usando* somas de Riemann.

A bibliografia, são os capítulos 04, 05 das minhas notas de aula.

palavras chave: *interpolação polinomial, programação, aproximação de dados discretos, análise da dados,*`riemann.cc`*, valor médio integral, integral aproximada.*

Os programas

`riemann.cc, exer06_02.calc, exer06_quest05.gnuplot`

se encontram na página, no link "programas". Observe que se tratam apenas de exemplos de programas, testados, funcionando, e que devem ser úteis no trabalho desta lista. Não se esqueça de que um experimento feito com um programa não valida um resultado, é apenas um teste que poderá guiá-l@ na busca de uma comprovação.

A última questão da lista não receberá nenhuma pontuação.

0.3 Exercícios

1. *Valor médio, Quantidade de um fenômeno Leia o programa* `riemann.cc`*, ele se encontra na página, no link "programas". Concentre sua leitura nas funções* `Riemann()` *e* `f()`*, definida na bilioteca*

   `raizes.h`

   onde se encontra a equação da função cuja integral está sendo calculada, troque por outra do seu interesse. Compile e rode o programa para calcular algumas integrais.

   (a) *(V)[ ](F)[ ] O programa* `riemann.cc` *calcula aproximadamente* $\int_a^b f(x)dx$ *para uma função* f *definida no programa, com leitura dos limites de integração pelo teclado.*

   (b) *(V)[ ](F)[ ] O programa* `riemann.cc` *calcula aproximadamente* $\int_a^b f(x)dx$ *para uma função* f *definida na biblioteca* `raizes`*, com leitura dos limites de integração pelo teclado.*

   (c) *(V)[ ](F)[ ] O programa* `riemann.cc` *calcula aproximadamente o valor médio integral de uma função* f *definida no programa, com leitura dos limites de integração pelo teclado.*

   (d) *(V)[ ](F)[ ] O programa* `riemann.cc` *calcula aproximadamente o valor médio integral de uma função* f *definida na biblioteca* `raizes.h` *com leitura dos limites de integração pelo teclado.*

   (e) *(V)[ ](F)[ ] A expressão (fórmula)*

   $$\int_p^q f(x)dx$$

   representa o valor médio de f *no intervalo* $p, q \in [a, b]$.

   (f) *(V)[ ](F)[ ] A expressão (fórmula)*

   $$\frac{1}{p-q}\int_p^q f(x)dx \ ; \ p \neq q \ ; p, q \in [a, b]$$

   representa o valor médio de f *no intervalo* $[a, b]$.

(g) (V)[ ](F)[ ] A expressão (fórmula) $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$; $a < b$ representa o valor médio de f no intervalo $[a,b]$.

(h) (V)[ ](F)[ ] A expressão (fórmula) $\frac{f(b)+f(a)}{2}$ representa o valor médio de f no intervalo $[a,b]$.

2. O valor médio de $f(x) = xcos(2x)$ no intervalo $[-5,7]$ é, aproximadamente,

   (a) (V)[ ](F)[ ] -0.425386

   (b) (V)[ ](F)[ ] 5.335823

   (c) (V)[ ](F)[ ] 0.425386

   (d) (V)[ ](F)[ ] -11.666666

   (e) (V)[ ](F)[ ] 2.335826

   (f) (V)[ ](F)[ ] -2.335823

3. O valor aproximado da integral de $f(x) = x^2sin(2x)$ no intervalo $[-3,7]$ é, aproximadamente,

   (a) (V)[ ](F)[ ] -15.335823

   (b) (V)[ ](F)[ ] 15.335823

   (c) (V)[ ](F)[ ] 155.766666

   (d) (V)[ ](F)[ ] -155.7666666

   (e) (V)[ ](F)[ ] 4.64478

   (f) (V)[ ](F)[ ] -2.335823

4. O programa `riemann.cc`

   (a) (V)[ ](F)[ ] O programa `riemann.cc` usa a função `escreve_intervalo()` que se encontra declarada e construída dentro do próprio programa.

   (b) (V)[ ](F)[ ] O programa `riemann.cc` usa a função `escreve_intervalo()` que se encontra declarada e construída dentro de uma bilioteca.

   (c) (V)[ ](F)[ ] O programa `riemann.cc` usa a classe `Ambiente` que é incluída diretamente no programa.

   (d) (V)[ ](F)[ ] O programa `riemann.cc` usa a classe `Ambiente` que é incluída pela bilioteca `raizes.h`.

   (e) (V)[ ](F)[ ] O programa `riemann.cc` declara seis funções que estão construídas no próprio programa.

   (f) (V)[ ](F)[ ] O programa `riemann.cc` não possui nenhuma função construída no próprio programa, todas são inseridas atravez de alguma biblioteca.

5. Interpolação linear *Gnuplot é a ferramenta ideal para esta questão. Interpolação linear é o valor obtido quando se traça uma reta entre os pontos. Qualquer ponto interior deste segmento de reta é uma média ponderada, portanto, equação da reta com gnuplot é instrumento para esta questão.*

   (a) (V)[ ](F)[ ] - interpolação linear
   Dados dois números a,b e um parâmetro $s \in [0,1]$ a expressão

   $$sa + (1-s)b$$

   é a média aritmética ponderada entre a,b com peso s.

   (b) (V)[ ](F)[ ] - interpolação linear
   Dados dois números a,b e um parâmetro $s \in [0,1]$ a expressão

   $$sa + (1-s)b$$

   é a média aritmética ponderada entre a,b com pesos $s,(1-s)$, de modo que se s for "pequeno", fica aumentada a "importância" de b.

   (c) (V)[ ](F)[ ] - interpolação linear -2.31 é a média aritmética ponderada com pesos $0.33,(1-0.33)$, nesta ordem, dos números -7, 0.

   (d) (V)[ ](F)[ ] - interpolação linear -6.31 é a média aritmética ponderada com pesos $0.33,(1-0.33)$, nesta ordem, dos números 0, -7

   (e) (V)[ ](F)[ ] - interpolação linear 2.31 é uma possível média aritmética ponderada com pesos $0.33,(1-0.33)$, nesta ordem, dos números 0, -7

   (f) (V)[ ](F)[ ] - interpolação linear
   A media aritmética ponderada entre dois números, A,B pode ser obtida com a equação da reta, $y = f(x)$, que passa nos pontos $(0,A),(1,B)$ ao selecionarmos o valor $f(s)$; $s \in [0,1]$. Se o valor de s se encontrar no intervalo $[0,0.5]$ o valor de B prevalece para o cálculo da média.

   (g) (V)[ ](F)[ ] - interpolação linear
   A media aritmética ponderada entre dois números, A,B pode ser obtida com a equação da reta, $y = f(x)$, que passa nos pontos $(0,A),(1,B)$ ao selecionarmos o valor $f(s)$; $s \in [0,1]$. Se o valor de s se encontrar no intervalo $[0,0.5]$ o valor de A prevalece para o cálculo da média.

6. Modelagem de dados - interpolação polinomial de grau 3 Considere a seguinte tabela de dados (obtidos por um sensor)

   em que x_k são os nós da malha, y_k, são os valores colhidos em cada um dos nós e d_k são as taxas de variação calculadas em cada nó.

   (a) (V)[ ](F)[ ] - interpolação polinomial do terceiro grau Podemos encontrar quatro polinômios do terceiro grau, (o coeficiente a_{i0} é do termo constante e o coeficiente a_{i3} é do termo do terceiro grau).

x_k	y_k	d_k
-7	-10	-70.65
-3	13	2.5
0	0	-0.533
2	17	0
7	-6	0

Tabela 1: Dados lidos por sensor

P_1, no intervalo $[-7,-3]$, com coeficientes (aproximados)

$$(a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}) = (-10.000000, -70.650002, 39.012501, -4.978125)$$

e P_2, no intervalo $[-3,0]$, com coeficientes (aproximados)

$$(a_{20}, a_{21}, a_{22}, a_{23}) = (-13.000000, 2.500000, -5.822333, 1.181519)$$

P_3, no intervalo $[0,2]$, com coeficientes (aproximados)

$$(a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}) = (0.000000, 0.533000, 13.283000, -4.383250)$$

e P_4, no intervalo $[2,7]$, com coeficientes (aproximados)

$$(a_{20}, a_{21}, a_{22}, a_{23}) = (-17.000000, 0.000000, -2.760000, 0.368000)$$

de modo que

x	y
-6.929998	-14.756151
-2.740000	13.277177
1.829999	16.645351
5.830040	-2.811427

são valores interpolados, com estes polinômios dos dados colhidos pelo sensor.

(b) *(V)[ ](F)[ ] - interpolação polinomial do terceiro grau Podemos encontrar quatro polinômios do terceiro grau, (o coeficiente a_{i0} é do termo constante e o coeficiente a_{i3} é do termo do terceiro grau).*
P_1, no intervalo $[-7,-3]$, com coeficientes (aproximados)

$$(a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}) = (-10.000000, -70.650002, 39.012501, -4.978125)$$

e P_2, no intervalo $[-3,0]$, com coeficientes (aproximados)

$$(a_{20}, a_{21}, a_{22}, a_{23}) = (13.000000, 2.500000, -5.822333, 1.181519)$$

P_3, no intervalo $[0,2]$, com coeficientes (aproximados)

$$(a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}) = (0.000000, -0.533000, 13.283000, -4.383250)$$

e P_4, no intervalo $[2,7]$, com coeficientes (aproximados)

$$(a_{20}, a_{21}, a_{22}, a_{23}) = (17.000000, 0.000000, -2.760000, 0.368000)$$

de modo que

x	y
-6.929998	-14.756151
-2.740000	13.277177
1.829999	16.645351
5.830040	-2.811427

são valores interpolados, com estes polinômios dos dados colhidos pelo sensor.

(c) *(V)[ ](F)[ ] A tabela abaixo fornece a interpolação linear de alguns dos dados da tabela 1.*

x	y
-5.839973	-47.229122
-2.830000	13.262539
2.340000	16.695408
4.270004	7.082493

(d) *(V)[ ](F)[ ] A tabela abaixo fornece a interpolação linear de alguns dos dados da tabela 1*

x	y
-6.929998	-9.5974885
-4.50862	4.325435
1.829999	15.5549915
5.830040	-0.618184

(e) *(V)[ ](F)[ ] A expressão*

$$\frac{1}{4}\int_{-7}^{-3} P_1(x)dx + \frac{1}{4}\int_{-3}^{0} P_2(x)dx + \frac{1}{4}\int_{0}^{2} P_3(x)dx \frac{1}{4}\int_{2}^{7} P_4(x)dx$$

é uma boa estimativa do valor médio do fenômeno analisado considerados os dados conseguidos na tabela 1.

$$\frac{1}{4}\int_{-7}^{-3} P_1(x)dx + \frac{1}{3}\int_{-3}^{0} P_2(x)dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2} P_3(x)dx \frac{1}{5}\int_{2}^{7} P_4(x)dx$$

(f) *(V)[ ](F)[ ] A expressão*

$$\frac{1}{2}\int_{-7}^{-3} P_1(x)dx + \frac{1}{2}\int_{-3}^{0} P_2(x)dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2} P_3(x)dx \frac{1}{2}\int_{2}^{7} P_4(x)dx$$

é uma boa estimativa do valor médio do fenômeno analisado considerados os dados conseguidos na tabela 1.

(g) *(V)[ ](F)[ ] A expressão*

$$\frac{1}{4}\left(\int_{-7}^{-3} P_1(x)dx + \int_{-3}^{0} P_2(x)dx + \int_{0}^{2} P_3(x)dx \int_{2}^{7} P_4(x)dx\right)$$

é uma boa estimativa do valor médio do fenômeno analisado considerados os dados conseguidos na tabela 1.

(h) *(V)[ ](F)[ ] Calculando o valor médio do fenômeno usando apenas os dados colhidos, vide tabela 1, se verifica um valor muito próximo do valor médio integral, por pura coincidência.*

(i) *(V)[ ](F)[ ] Calculando o valor médio do fenômeno usando apenas os dados colhidos, vide tabela1, se verifica uma forte discrepância com o valor médio integral.*

(j) *(V)[ ](F)[ ] Analisando o gráfico na figura (1) página 7 se pode concluir que o valor médio integral dos dados, considerando a interpolação polinomial, é um número negativo.*

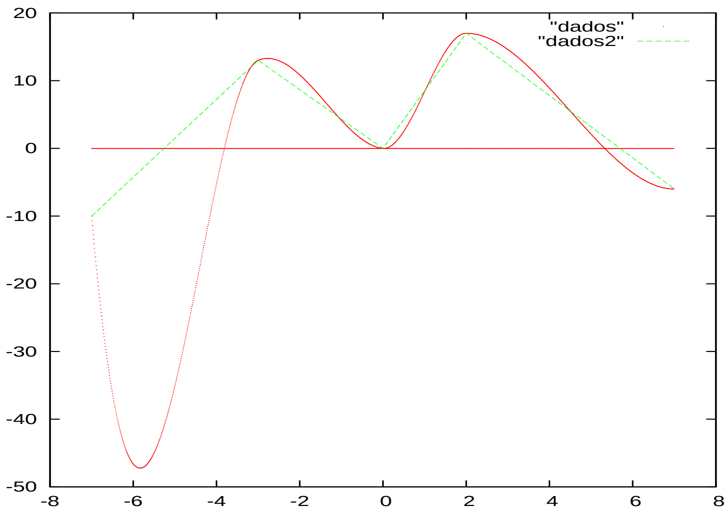

Figura 1: Interpolação polinomial

(k) *(V)[ ](F)[ ] Analisando o gráfico na figura 1 página 7 se pode concluir que a interpolação linear representa uma boa modelagem de um fenômeno.*

7. *Integral aproximada*

(a) *(V)[ ](F)[ ] Calculando a integral*

$$\int_{-3}^{2} 1 + x^2 dx \tag{1}$$

com uma aproximação polinomial de grau três, usando a unidade como passo da malha, se obtém o valor aproximado da integral com um erro menor do que 0.00000001.

(b) *(V)[ ](F)[ ] Calculando a integral*

$$\int_{-3}^{2} 1 + x^2 dx \tag{2}$$

com uma aproximação polinomial de grau três, usando a unidade como passo da malha, se obtém o valor aproximado da integral com um erro menor do que 0.00001.

(c) *(V)[ ](F)[ ] Como sabemos calcular exatamente esta integral, o exemplo representado pelo item anterior é um evidente erro pedagógico.*

(d) *(V)[ ](F)[ ] Como sabemos calcular exatamente esta integral, o exemplo representado pelo item anterior é um evidente apoio pedagógico na compreensão do significado do cálculo de integrais aproximadamente.*

8. *Validação estatística A integral*

$$I = \int_{-3}^{3} x^3 sen(x)dx \tag{3}$$

foi calculada com um programa de aproximação polinomial *sendo produzida a seguinte tabela*

passo da malha	*valor da integral*	*média histórica*	*afast. média*
1	*23.86187*	-	-
0.5	*19.09180*	*21.476835*	*2.385035*
0.2	*17.14654*	*18.11917*	*0.97263*
0.1	*16.65093*	*16.898735*	*0.247805*
0.05	*16.43176*	*16.541345*	*0.109585*
0.01	*16.27012*	*16.35094*	*0.08082*
0.001	*16.23511*	*16.252615*	*0.017505*
0.0001	*16.22866*	*16.231885*	*0.003225*

que traz o passo, o valor da integral correspondente ao passo, a média histórica (média entre dois valores sucessivos), e a diferença entre valores sucessivos da média histórica.

(a) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *O programa, provavelmente, está errado.*

(b) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *O valor aproximado da integral*

$$I = \int_{-3}^{3} x^3 sen(x) dx \tag{4}$$

usando somas de Riemann com partição uniforme do intervalo de 1000 subdivisões é 23.746704 *cuja diferença do valor exato da integral é menor do que* 0.0002

(c) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *O cálculo da integral com soma de Riemann feito no item anterior mostra que a aproximação polinomial é perfeitamente inútil.*

(d) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *O valor aproximado da integral*

$$I = \int_{-3}^{3} x^3 sen(x) dx \tag{5}$$

usando um polinômio de Lagrange que interpole os pontos $(x_k, f(x_k)$ *em que* x_k *são os nós da malha de passo 1 do intervalo* $[-3, 3]$ *é* 25.983 *em que o valor foi truncado na quarta decimal depois da vírgula.*

9. <u>Discussão sobre o método</u> *Esta questão não receberá pontos.*

Redija a sua forma de ver a seguinte situação: calculamos as integrais aproximadas de funções cujas integrais exatas sabiamos calcular. Isto parece ser um absurdo. *Justifique cuidadosamente a sua opinião, em particular use exemplos desta lista para apoiar o seu ponto de vista.*

Esta questão tem por objetivo excitar a sua forma crítica do contúdo da disciplina e trazer para o professor uma informação sobre o grau de "objetividade" alcançado no seu trabalho.

A sua <u>forma de ver</u> *o conteúdo desta lista será usada pelo professor para corrigir eventuais erros na condução e planejamento da disciplina, no futuro. Não tema expressar sua opinião livremente, e muito menos ferir o orgulho do professor, a sua opinião faz parte da avaliação do trabalho do professor, mas também faz parte da avaliação do seu trabalho se você o fizer com uma justificativa.*