



Cálculo Numérico Computacional lista número 05
 Aproximação polinomial Aproximação e recursividade
 Prof. Tarcísio Praciano-Pereira Dep. de Computação
 tarcisio@member.ams.org

alun@:	
Univ. Estadual Vale do Acaraú	Sobral, 2 de setembro de 2009
Documento escrito com \LaTeX	sis. op. Debian/Gnu/Linux
página da disciplina:	www.calculo-numerico.sobralmatematica.org

Por favor, se você entregar a lista, em papel, prenda esta *folha de rosto* na solução, preenchendo com os seus dados. Ela será usada na correção. Se você quiser entregar o trabalho eletronicamente, envie o arquivo para o meu e-mail ou entregue em CD na secretária do Curso de Computação. **data da entrega desta lista:** quarta-feira, 08 de Setembro de 2009 até 24:00 h, via eletrônica ou até 22 horas, na secretária do Curso de Computação. Se o trabalho for feito em equipe, basta um único trabalho ser entregue.

0.1 Orientação

Texto básico, capítulo 3, recursividade, capítulo 4, aproximação polinomial, do meu livro de Cálculo Numérico que se encontra na página da disciplina, no link “textos”.

Objetivo: Simular um fenômeno a partir de um levantamento discreto do mesmo.

Os programas `exer05_01.gnuplot` `exer05_02_03.gnuplot` serão usados na aula de quarta-feira e podem ser usados para sua compreensão desta lista. Eles se encontram no link “programas” da página da disciplina.

palavras chave: gnuplot, aproximação polinomial, modelagem de fenômeno, interpolação polinomial, recursividade.

0.2 Exercícios

1. Polinômios de grau $n - 1$

- $(V)[\](F)[\]$ Dados dois pontos existe uma única função do primeiro grau que passa por estes pontos.
- $(V)[\](F)[\]$ Dados três pontos existe uma única função do segundo grau que passa por estes pontos.
- $(V)[\](F)[\]$ Dados n pontos existe uma única função do grau $n - 1$ que passa por estes pontos.

- Se um polinômio P , do grau menor ou igual $n - 1$, assumir n vezes o mesmo valor então P é constante e de grau zero.
- $(V)[\](F)[\]$ Se um polinômio Q tiver grau $n - 1$ assumir n vezes o mesmo valor, então Q é constante.
- $(V)[\](F)[\]$ Se um polinômio Q tiver grau menor ou igual $n - 1$ assumir n vezes o mesmo valor, então Q é constante, e tem grau zero.

2. Derivada algorítmica

- $(V)[\](F)[\]$ Se $f(x) = \sin(x)\cos(x)$ então $f'(x) = \sin(x) + \cos(x)$
- $(V)[\](F)[\]$ Se $f(x) = \sin(x)\cos(x)$ então $f'(x) = \cos^2(x) + \sin^2(x)$
- $(V)[\](F)[\]$ Se $P(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$ então

$$P'(x) = (x - b)(x - c) + (x - a)(x - c) + (x - a)(x - b)$$

3. Interpolação polinomial clássica

Considere os números reais

$$a, b, c ; a < b < c$$

e o polinômio

$$P(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$$

- $(V)[\](F)[\]$
Então $P'(x)$ terá exatamente duas raízes que ficam nos intervalos abertos (a, b) , (b, c) .
- $(V)[\](F)[\]$ Então $P'(\alpha) \neq 0$ para todo $\alpha \in \{a, b, c\}$.
- $(V)[\](F)[\]$
Notação: $P_\alpha(x) = \frac{P(x)}{x - \alpha}$
Então $P'(x) = \sum_{\alpha \in \{a, b, c\}} P_\alpha(x)$
- $(V)[\](F)[\]$
Notação: $P_a(x) = \frac{P(x)}{x - a}$
O grau de

$$Q(x) = \sum_{\alpha \in \{a, b, c\}} P_\alpha(x)$$

é 2.

- $(V)[\](F)[\]$
Notação: $P_\alpha(x) = \frac{P(x)}{x - \alpha}$
Defina

$$Q(x) = \sum_{\alpha \in \{a, b, c\}} \frac{P_\alpha(x)}{P'(\alpha)}$$

então Q é um polinômio de grau 2 que vale 1 em cada uma das raízes de P .

(f) (V)[](F)[]

Notação: $P_\alpha(x) = \frac{P(x)}{x-\alpha}$

Defina

$$Q(x) = \sum_{\alpha \in \{a,b,c\}} \frac{P_\alpha(x)}{P'(\alpha)}$$

então Q é um polinômio de grau 0 que vale 1 em qualquer uma das raízes de P .

(g) (V)[](F)[]

Notação: $P_\alpha(x) = \frac{P(x)}{x-\alpha}$

Defina

$$Q(x) = \sum_{\alpha \in \{a,b,c\}} \frac{P_\alpha(x)}{P'(\alpha)}$$

então Q é constante igual a 1.

(h) (V)[](F)[] **Polinômio de Lagrange**

Notação: $P_\alpha(x) = \frac{P(x)}{x-\alpha}$ Considere uma função

$$h : \alpha \in \{a, b, c\} \mapsto h(\alpha) \in \mathbf{R}$$

Quer dizer que os números $h(a), h(b), h(c)$ são dados.

Defina

$$Q(x) = \sum_{\alpha \in \{a,b,c\}} \frac{h(\alpha)P_\alpha(x)}{P'(\alpha)}$$

então $Q(\alpha) = h(\alpha)$. Logo Q é um polinômio de grau 2 passa nos pontos

$$(a, h(a)), (b, h(b)), (c, h(c))$$

Em outras palavras, Q é um polinômio de grau 2 interpolando os pontos

$$(a, h(a)), (b, h(b)), (c, h(c))$$

4. Polinômio passando por n pontos Considere $(a_i)_{i=1,\dots,n}$ uma sucessão estritamente crescente de números reais e o polinômio

$$P(x) = (x - a_1) \cdots (x - a_n) = \prod_{i=1}^n (x - a_i)$$

(a) (V)[](F)[] Então $P'(x)$ terá uma raiz em cada um dos $n-1$ intervalos abertos determinados pelas raízes de P .

(b) (V)[](F)[] Então $P'(a_i) \neq 0$ para todo $i = 0, \dots, n$.

(c) (V)[](F)[] Notação: $P_i(x) = \frac{P(x)}{x-a_i}$. Então

$$P'(x) = \sum_{i=1}^n P_i(x)$$

(d) (V)[](F)[] Com a notação Notação: $P_i(x) = \frac{P(x)}{x-a_i}$.

O grau de $Q(x) = \sum_{i=1}^n P_i(x)$ é $n-1$.

(e) (V)[](F)[] Com a notação notação: $P_i(x) = \frac{P(x)}{x-a_i}$.

Defina $Q(x) = \sum_{i=1}^n \frac{P_i(x)}{P'(a_i)}$ então Q é um polinômio de grau $n-1$ que vale 1 em cada uma das raízes de P .

(f) (V)[](F)[] Com a notação notação: $P_i(x) = \frac{P(x)}{x-a_i}$.

Defina $Q(x) = \sum_{i=1}^n \frac{P_i(x)}{P'(a_i)}$ então Q é um polinômio de grau menor ou igual $n-1$ que vale 1 em cada uma das raízes de P .

(g) (V)[](F)[] Com a notação notação: $P_i(x) = \frac{P(x)}{x-a_i}$.

Defina $Q(x) = \sum_{i=1}^n \frac{P_i(x)}{P'(a_i)}$ então Q é constante igual a 1.

(h) (V)[](F)[] **Polinômio de Lagrange** Com a notação notação: $P_i(x) = \frac{P(x)}{x-a_i}$.

Considere a função

$$h : \alpha \in \{a_1, \dots, a_n\} \mapsto h(\alpha) \in \mathbf{R}$$

Quer dizer que os números $h(a_1), \dots, h(a_n)$ são dados.

Defina $Q(x) = \sum_{i=1}^n \frac{h(a_i)P_i(x)}{P'(a_i)}$ então $Q(a_i) = h(a_i)$.

Logo Q é um polinômio de grau $n-1$ passa nos pontos

$$(a_1, h(a_1)), \dots, (a_n, h(a_n))$$

Em outras palavras, Q é um polinômio de grau $n-1$ interpolando os pontos

$$(a_1, h(a_1)), \dots, (a_n, h(a_n))$$