

UNIVERSIDADE ESTADUAL VALE DO ACARAÚ - UVA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS – CCET
CURSO: CIÊNCIAS DA MATEMÁTICA
DISCIPLINA: CÁLCULO NUMÉRICO COMPUTACIONAL
PROF(a): TARCÍSIO PRACIANO PEREIRA
ALUNO: RODOLFO SOARES TEIXEIRA
PERÍODO: 6º

RESOLUÇÃO DA LISTA 04

1.

a) (FALSO)

Justificativa: Pois desenvolvendo a derivada de $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$, resultará em $f'(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$, diferente do que é dado no item. Como podemos observar abaixo:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x) \cdot \cos(x) \Rightarrow \\ f'(x) &= \cos(x) \cdot \cos(x) + \sin(x) \cdot [-\sin(x)] \Rightarrow \\ f'(x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) \end{aligned}$$

b) (FALSO)

Justificativa: Pelo mesmo critério do item anterior, pois a derivada da expressão não será igual à dada.

c) (VERDADEIRO)

Justificativa: Pois a derivada de $P(x) = (x + a) \cdot (x + b) \cdot (x + c)$, realmente será

$$P'(x) = 1 \cdot (x + b) \cdot (x + c) + (x + a) \cdot 1 \cdot (x + c) + (x + a) \cdot (x + b) \cdot 1 \Rightarrow$$

$$P'(x) = (x + b) \cdot (x + c) + (x + a) \cdot (x + c) + (x + a) \cdot (x + b)$$

d) (FALSO)

Justificativa: Pois para $P(x) = 0$, teremos raízes iguais a $\Rightarrow -a, -b$ e $-c$, onde $-c < -b < -a$, o que levará a crê que $P'(x)$ terá exatamente duas raízes que ficam nos intervalos $[-c, -b]$, $[-b, -a]$. O que se justifica nos próximos itens.

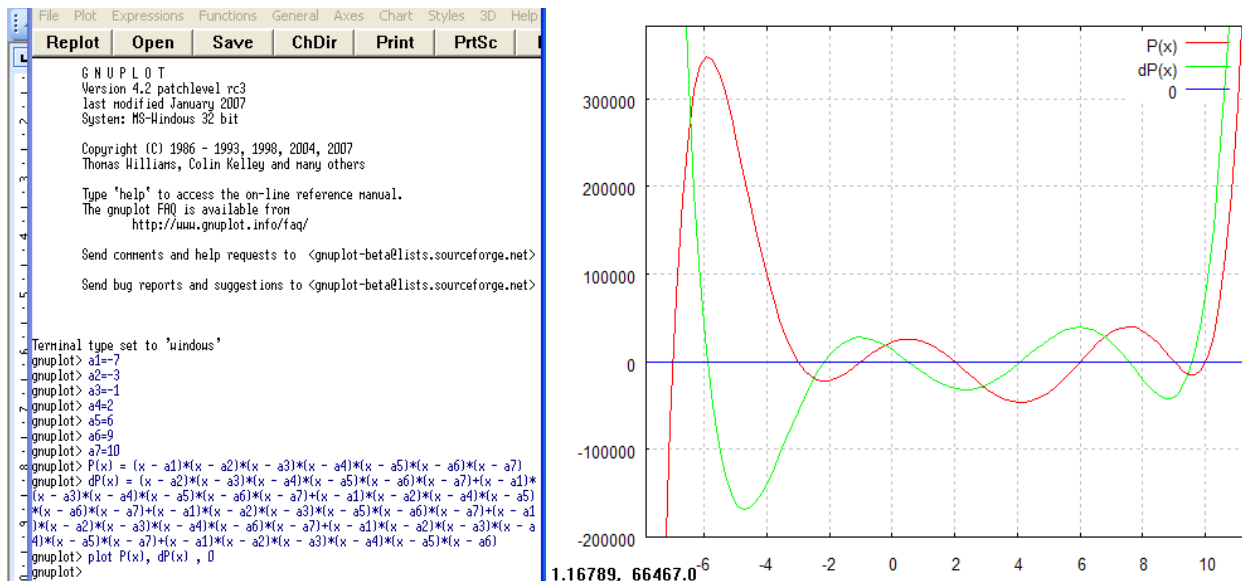
e) (VERDADEIRO)

Justificativa: Pela justificativa do próximo item podemos julgar este item como sendo correto.

f) (VERDADEIRO)

Justificativa: Este item justifica o mesmo e os outros dois itens anteriores.

Como podemos observar no exemplo abaixo, para cada um dos 6 intervalos deste gráfico teremos um par de raízes da derivada de $P(x)$ que serão os extremos desses intervalos, o que se torna verdade para Polinômios de diferentes graus.



2.

a) (VERDADEIRO)

Justificativa: Executando as derivadas de $P(\alpha)$ para $\alpha \in \{a, b, c\}$, iremos perceber que todas serão diferentes de 0.

Se $P(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$ então

$$P'(x) = 1 * [(x - b)(x - c)] + (x - a) * [1 * (x - c) + (x - b) * 1] = (x - b)(x - c) + (x - a)(x - c) + (x - a)(x - b)$$

$$P'(a) = (a - b)(a - c) + (a - a)(a - c) + (a - a)(a - b) = (a - b)(a - c) \neq 0$$

$$P'(b) = (b - b)(b - c) + (b - a)(b - c) + (b - a)(b - b) = (b - a)(b - c) \neq 0$$

$$P'(c) = (c - b)(c - c) + (c - a)(c - c) + (c - a)(c - b) = (c - a)(c - b) \neq 0$$

b) (VERDADEIRO)

Justificativa: Devemos mostrar que sendo $P(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$, existirá $P_a(x)$

$$= \frac{P(x)}{x - a}, \text{ onde resultará que } P'(x) = \sum_{\alpha \in \{a, b, c\}} P_{\alpha}(x), \text{ ou seja:}$$

$$P'(x) = (x - b)(x - c) + (x - a)(x - c) + (x - a)(x - b) = \sum_{\alpha \in \{a, b, c\}} P_{\alpha}(x)$$

$$\text{Para isso, será preciso encontrar os } P_a(x) = \frac{P(x)}{x - a}.$$

$$\begin{cases} P_a(x) = \frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{x-a} = (x-b)(x-c) \\ P_b(x) = \frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{x-b} = (x-a)(x-c) \\ P_c(x) = \frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{x-c} = (x-a)(x-b) \end{cases}$$

Como $P'(x) = \sum_{\alpha \in \{a, b, c\}} P_{\alpha}(x)$, teremos:

$P'(x) = P_a(x) + P_b(x) + P_c(x) = (x-b)(x-c) + (x-a)(x-c) + (x-a)(x-b)$
 Sendo assim, podemos dizer que o item está correto.

c) (VERDADEIRO)

Justificativa: Devemos mostrar que para $P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$. Teremos $P_a(x)$

$$= \frac{P(x)}{x-a}, \text{ onde } Q(x) = \sum_{\alpha \in \{a,b,c\}} P_{\alpha}(x), \text{ sendo seu grau igual à 2.}$$

Pegando o resultado final do item anteriortemos:

$$Q(x) = \sum_{\alpha \in \{a,b,c\}} P_{\alpha}(x) = (x-b)(x-c) + (x-a)(x-c) + (x-a)(x-b)$$

$$\begin{aligned} \text{Desenvolvendo temos } \Rightarrow x^2 - xc - xb + bc + x^2 + ac - xa - xc + x^2 - xb - xa + ab \Rightarrow \\ 3x^2 - 2xa - 2xb - 2xc + (ac + ab + bc) \Rightarrow \\ 3x^2 - 2x(a + b + c) + (ac + ab + bc) \end{aligned}$$

Como podemos ver, a equação será realmente do segundo grau.

d) (FALSO)

Justificativa: Pois desenvolvendo a expressão, não iremos obter um polinômio do segundo grau, onde valerá 1 em cada uma das raízes de P.

Encontraremos $Q(x) = 1$ e um polinômio de grau 0. Como podemos observar abaixo:

Como $Q(x) = \sum_{\alpha \in \{a,b,c\}} P_{\alpha}(x)$, teremos o seguinte:

Temos que:

$$P_a(x) = \frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{x-a} = (x-b)(x-c)$$

$$P_b(x) = \frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{x-b} = (x-a)(x-c)$$

$$P_c(x) = \frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{x-c} = (x-a)(x-b)$$

E temos que:

$$P'(x) = (x-b)(x-c) + (x-a)(x-c) + (x-a)(x-b)$$

$$P'(a) = (a-b)(a-c) + (a-a)(a-c) + (a-a)(a-b) = (a-b)(a-c)$$

$$P'(b) = (b-b)(b-c) + (b-a)(b-c) + (b-a)(b-b) = (b-a)(b-c)$$

$$P'(c) = (c-b)(c-c) + (c-a)(c-c) + (c-a)(c-b) = (c-a)(c-b)$$

$$\begin{aligned} Q(x) &= \sum_{\alpha \in \{a,b,c\}} \frac{P_{\alpha}(x)}{P'(\alpha)} = \frac{P_a(x)}{P'(a)} + \frac{P_b(x)}{P'(b)} + \frac{P_c(x)}{P'(c)} = \\ &= \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = \\ &= \frac{(x-b)(x-c)(c-b)}{[(-1)(b-a)][(-1)(c-a)](c-b)} + \frac{(x-a)(x-c)(c-a)}{(b-a)[(-1)(c-b)](c-a)} + \frac{(x-a)(x-b)(b-a)}{(c-a)(c-b)(b-a)} \\ &= \frac{(x-b)(x-c)(c-b)}{(b-a)(c-a)(c-b)} - \frac{(x-a)(x-c)(c-a)}{(b-a)(c-b)(c-a)} + \frac{(x-a)(x-b)(b-a)}{(c-a)(c-b)(b-a)} = \\ &= \frac{(x-b)(x-c)(c-b) - (x-a)(x-c)(c-a) + (x-a)(x-b)(b-a)}{(c-a)(c-b)(b-a)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \\
&\frac{[x^2 - (b+c)x + bc](c-b) - [x^2 - (a+c)x + ac](c-a) + [x^2 - (a+b)x + ab](b-a)}{(c-a)(c-b)(b-a)} \\
&= \\
&= \\
&\frac{x^2[(c-b) - (c-a) + (b-a)] - x[(b+c)(c-b) - (a+c)(c-a) + (a+b)(b-a)] + [bc(c-b) - ac(c-a) + ab(b-a)]}{(c-a)(c-b)(b-a)} \\
&= \\
&= \\
&\frac{x^2(c-b-c+a+b-a) - x(c^2 - b^2 - c^2 + a^2 + b^2 - a^2) + (bc^2 - b^2c - ac^2 + a^2c + ab^2 - a^2b)}{(c-a)(c-b)(b-a)} \\
&= \\
&= \frac{(bc^2 - b^2c - ac^2 + a^2c + ab^2 - a^2b)}{(c-a)(c-b)(b-a)} = \frac{(bc^2 - b^2c - ac^2 + a^2c + ab^2 - a^2b)}{(c^2 - bc - ac + ab)(b-a)} = \\
&= \frac{(bc^2 - b^2c - ac^2 + a^2c + ab^2 - a^2b)}{(bc^2 - b^2c - abc + ab^2 - ac^2 + abc + a^2c - a^2b)} = \\
&= \frac{(bc^2 - b^2c - ac^2 + a^2c + ab^2 - a^2b)}{(bc^2 - b^2c + ab^2 - ac^2 + a^2c - a^2b)} = 1
\end{aligned}$$

Então definimos Q(x) como: $Q(x) = \frac{a^2}{P'(a)} + \frac{b^2}{P'(b)} + \frac{c^2}{P'(c)} = \sum_{\alpha \in \{a,b,c\}} \frac{\alpha^2}{P'(\alpha)} = 1$

e) (VERDADEIRO)

Justificativa: Para justificar este item, devemos dizer que existem dois pontos distintos, ou seja, (x_0, y_0) e (x_1, y_1) , onde através da forma estrutural de uma função do primeiro grau, podemos escrever a seguinte coisa:

$$y = a_1x + a_0$$

Substituindo os pontos na função, chegaremos a duas expressões que nos darão um sistema linear de solução única, onde serão dados os valores dos coeficientes a_1, a_0 que formaram a única função do primeiro grau que passará entre estes dois pontos.

$$\begin{cases} y_0 = a_1x_0 + a_0 \\ y_1 = a_1x_1 + a_0 \end{cases}$$

f) (VERDADEIRO)

Justificativa: Para justificar este item, devemos dizer que existem três pontos distintos, ou seja, (x_0, y_0) , (x_1, y_1) e (x_2, y_2) , onde através da forma estrutural de uma função do segundo grau, podemos escrever a seguinte coisa:

$$y = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P'(c) = (c-b)(c-c) + (c-a)(c-c) + (c-a)(c-b) = (c-a)(c-b)$$

$$\begin{aligned} Q(x) &= \sum_{\alpha \in \{a,b,c\}} \frac{P_{\alpha}(x)}{P'(\alpha)} = \frac{P_a(x)}{P'(a)} + \frac{P_b(x)}{P'(b)} + \frac{P_c(x)}{P'(c)} = \\ &= \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = \\ &= \frac{(x-b)(x-c)(c-b)}{[(-1)(b-a)][(-1)(c-a)](c-b)} + \frac{(x-a)(x-c)(c-a)}{(b-a)[(-1)(c-b)](c-a)} + \frac{(x-a)(x-b)(b-a)}{(c-a)(c-b)(b-a)} \\ &= \frac{(x-b)(x-c)(c-b)}{(b-a)(c-a)(c-b)} - \frac{(x-a)(x-c)(c-a)}{(b-a)(c-b)(c-a)} + \frac{(x-a)(x-b)(b-a)}{(c-a)(c-b)(b-a)} = \\ &= \frac{(x-b)(x-c)(c-b) - (x-a)(x-c)(c-a) + (x-a)(x-b)(b-a)}{(c-a)(c-b)(b-a)} = \\ &= \frac{[x^2 - (b+c)x + bc](c-b) - [x^2 - (a+c)x + ac](c-a) + [x^2 - (a+b)x + ab](b-a)}{(c-a)(c-b)(b-a)} \\ &= \frac{x^2[(c-b) - (c-a) + (b-a)] - x[(b+c)(c-b) - (a+c)(c-a) + (a+b)(b-a)] + [bc(c-b) - ac(c-a) + ab(b-a)]}{(c-a)(c-b)(b-a)} \\ &= \frac{x^2(c-b-c+a+b-a) - x(c^2 - b^2 - c^2 + a^2 + b^2 - a^2) + (bc^2 - b^2c - ac^2 + a^2c + ab^2 - a^2b)}{(c-a)(c-b)(b-a)} \\ &= \frac{(bc^2 - b^2c - ac^2 + a^2c + ab^2 - a^2b)}{(c-a)(c-b)(b-a)} = \frac{(bc^2 - b^2c - ac^2 + a^2c + ab^2 - a^2b)}{(c^2 - bc - ac + ab)(b-a)} = \\ &= \frac{(bc^2 - b^2c - ac^2 + a^2c + ab^2 - a^2b)}{(bc^2 - b^2c - abc + ab^2 - ac^2 + abc + a^2c - a^2b)} = \\ &= \frac{(bc^2 - b^2c - ac^2 + a^2c + ab^2 - a^2b)}{(bc^2 - b^2c + ab^2 - ac^2 + a^2c - a^2b)} = 1 \end{aligned}$$

Então definimos $Q(x)$ como: $Q(x) = \frac{a^2}{P'(a)} + \frac{b^2}{P'(b)} + \frac{c^2}{P'(c)} = \sum_{\alpha \in \{a,b,c\}} \frac{\alpha^2}{P'(\alpha)} = 1$

j) (VERDADEIRO)

Justificativa: Temos que:

$$P_a(x) = \frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{x-a} = (x-b)(x-c)$$

$$P_b(x) = \frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{x-b} = (x-a)(x-c)$$

$$P_c(x) = \frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{x-c} = (x-a)(x-b)$$

E temos que:

$$P'(x) = (x-b)(x-c) + (x-a)(x-c) + (x-a)(x-b)$$

$$P'(a) = (a-b)(a-c) + (a-a)(a-c) + (a-a)(a-b) = (a-b)(a-c)$$

$$P'(b) = (b-b)(b-c) + (b-a)(b-c) + (b-a)(b-b) = (b-a)(b-c)$$

$$P'(c) = (c-b)(c-c) + (c-a)(c-c) + (c-a)(c-b) = (c-a)(c-b)$$

$$\begin{aligned} Q(x) &= \sum_{\alpha \in \{a,b,c\}} \frac{h(\alpha)P_\alpha(x)}{P'(\alpha)} = \frac{h(a)P_a(x)}{P'(a)} + \frac{h(b)P_b(x)}{P'(b)} + \frac{h(c)P_c(x)}{P'(c)} = \\ &= h(a) \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + h(b) \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + h(c) \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = \\ &= \frac{h(a)(x-b)(x-c)(c-b)}{[(-1)(b-a)][(-1)(c-a)](c-b)} + \frac{h(b)(x-a)(x-c)(c-a)}{(b-a)[(-1)(c-b)](c-a)} + \frac{h(c)(x-a)(x-b)(b-a)}{(c-a)(c-b)(b-a)} \\ &= \\ &= \frac{h(a)(x-b)(x-c)(c-b)}{(b-a)(c-a)(c-b)} - \frac{h(b)(x-a)(x-c)(c-a)}{(b-a)(c-b)(c-a)} + \frac{h(c)(x-a)(x-b)(b-a)}{(c-a)(c-b)(b-a)} \\ &= \\ &= \frac{h(a)(x-b)(x-c)(c-b) - h(b)(x-a)(x-c)(c-a) + h(c)(x-a)(x-b)(b-a)}{(c-a)(c-b)(b-a)} \\ &= \\ &= \frac{[x^2 - (b+c)x + bc][h(a)(c-b)] - [x^2 - (a+c)x + ac][h(b)(c-a)] + [x^2 - (a+b)x + ab][h(c)(c-b)]}{(c-a)(c-b)(b-a)} \\ &= \\ &= \frac{x^2 [h(a)(c-b) - h(b)(c-a) + h(c)(b-a)]}{(c-a)(c-b)(b-a)} \\ &+ \frac{x[(b+c)h(a)(c-b) - (a+c)h(b)(c-a) + (a+b)h(c)(b-a)]}{(c-a)(c-b)(b-a)} + \\ &+ \frac{[bc.h(a)(c-b) - ac.h(b)(c-a) + ab.h(c)(b-a)]}{(c-a)(c-b)(b-a)} \\ &= x^2 \left[\frac{h(a)}{(c-a)(b-a)} - \frac{h(b)}{(c-b)(b-a)} + \frac{h(c)}{(c-a)(c-b)} \right] \\ &- x \left[\frac{h(a)(c^2 - b^2) - h(b)(c^2 - a^2) + h(c)(b^2 - a^2)}{(c-a)(c-b)(b-a)} \right] + \\ &+ \left[\frac{bc.h(a)(c-b) - ac.h(b)(c-a) + ab.h(c)(b-a)}{(c-a)(c-b)(b-a)} \right] \end{aligned}$$

Como vemos não temos perspectivas de simplificação nos coeficientes de $Q(x)$ que muito provavelmente serão diferentes de zero e, portanto $Q(x)$ é um polinômio de grau 2.

É como

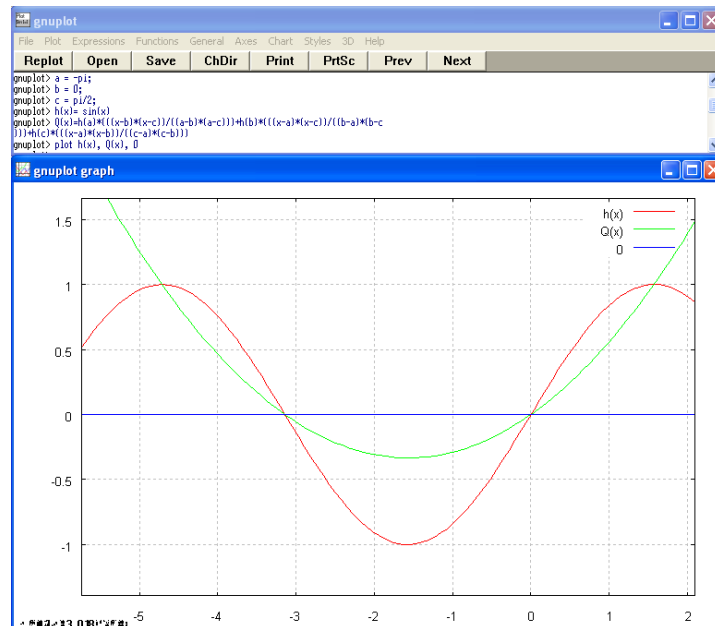
$$Q(x) = \sum_{\alpha \in \{a,b,c\}} \frac{h(\alpha)P_\alpha(x)}{P'(\alpha)} = h(a) \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + h(b) \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + h(c) \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$$

Podemos ver que $Q(a) = h(a)$, $Q(b) = h(b)$ e $Q(c) = h(c)$ e, portanto passa nos pontos:

$$(a, h(a)), (b, h(b)), (c, h(c))$$

Logo $Q(x)$ é um polinômio do segundo grau interpolando os pontos acima.

Veja um exemplo abaixo:



3.

a) (VERDADEIRO)

Justificativa: Como $P(x) = (x - a_1) \cdot (x - a_2) \cdot \dots \cdot (x - a_{n-1}) \cdot (x - a_n)$. Para mostrar que $P'(a_i) \neq 0$ desenvolvemos a derivada de $P(x)$, como podemos observar logo a seguir:

$$P'(x) = 1 \cdot (x - a_2) \cdot \dots \cdot (x - a_{n-1}) \cdot (x - a_n) + (x - a_1) \cdot 1 \cdot (x - a_3) \cdot \dots \cdot (x - a_{n-1}) \cdot (x - a_n) + \dots + (x - a_1) \cdot (x - a_2) \cdot \dots \cdot (x - a_{n-1}) \cdot 1$$

Para obter $P'(a_i)$, temos que substituir a_i na derivada de $P(x)$:

Sendo $a_i = a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$

$$\left\{ \begin{array}{l} P'(a_1) = (a_1 - a_2) \cdot \dots \cdot (a_1 - a_{n-1}) \cdot (a_1 - a_n) \neq 0 \\ P'(a_2) = (a_2 - a_1) \cdot (a_2 - a_3) \cdot \dots \cdot (a_2 - a_n) \neq 0 \\ \vdots \\ P'(a_{n-1}) = (a_{n-1} - a_1) \cdot \dots \cdot (a_{n-1} - a_{n-2}) \cdot (a_{n-1} - a_n) \neq 0 \\ P'(a_n) = (a_n - a_1) \cdot (a_n - a_2) \cdot \dots \cdot (a_n - a_{n-1}) \neq 0 \end{array} \right.$$

Como $P'(a_i) = P'(a_1) + P'(a_2) + \dots + P'(a_{n-1}) + P'(a_n)$, podemos dizer que $P'(a_i) \neq 0$.

b) (VERDADEIRO)

Justificativa: Queremos mostrar $P'(x_0) \neq 0$ para $x_0 \in \{a, b, c\}$, sendo:

$$P(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$$

Para começar devemos encontrar $P'(x)$, que nos dará a estrutura da derivada que será utilizada para substituir os valores de x_0 , dessa forma temos:

$$P'(x) = 1 \cdot [(x - b) \cdot (x - c)] + (x - a) \cdot [1 \cdot (x - c) + (x - b) \cdot 1] = (x - b) \cdot (x - c) + (x - a) \cdot (x - c) + (x - a) \cdot (x - b)$$

Substituindo $x_0 \in \{a, b, c\}$ temos:

$$P'(a) = (a - b) \cdot (a - c) + (a - a) \cdot (a - c) + (a - a) \cdot (a - b) = (a - b) \cdot (a - c) \neq 0$$

$$P'(b) = (b - b) \cdot (b - c) + (b - a) \cdot (b - c) + (b - a) \cdot (b - b) = (b - a) \cdot (b - c) \neq 0$$

$$P'(c) = (c - b) \cdot (c - c) + (c - a) \cdot (c - c) + (c - a) \cdot (c - b) = (c - a) \cdot (c - b) \neq 0$$

c) (FALSO)

Justificativa: Iremos justificar este item no próximo, pois ele trará as informações necessárias para que seja julgado como falso.

d) (VERDADEIRO)

Justificativa: Queremos mostrar que tendo $P(x) = (x - a_1) \cdot \dots \cdot (x - a_n) = \prod_{i=1}^n (x - a_i)$,

teremos $P_i(x) = \frac{P(x)}{x - a_i}$ que resultará em $P'(x) = \sum_{i=1}^n P_i(x)$.

$$\begin{aligned} \text{Sendo } P'(x) = & (x - a_2) \dots (x - a_{n-1}) \cdot (x - a_n) + (x - a_1) \cdot (x - a_3) \dots (x - a_{n-1}) \cdot (x - a_n) + \dots \\ & + \dots + \\ & \dots + (x - a_1) \cdot (x - a_2) \dots (x - a_{n-2}) \cdot (x - a_n) + (x - a_1) \cdot (x - a_2) \dots (x - a_{n-1}) \end{aligned}$$

Iremos procurar fazer com que $\sum_{i=1}^n P_i(x)$ também resulte na mesma expressão. Para isso, desenvolvemos os $P_i(x)$:

$$\left\{ \begin{aligned} P_i(a_1) &= \frac{(x - a_1) \cdot \dots \cdot (x - a_n)}{x - a_1} \\ P_i(a_2) &= \frac{(x - a_1)(x - a_2) \cdot \dots \cdot (x - a_n)}{x - a_2} \\ &\vdots \\ P_i(a_{n-1}) &= \frac{(x - a_1) \cdot \dots \cdot (x - a_{n-1})(x - a_n)}{x - a_{n-1}} \\ P_i(a_n) &= \frac{(x - a_1) \cdot \dots \cdot (x - a_n)}{x - a_n} \end{aligned} \right.$$

Como $\sum_{i=1}^n P_i(x) = P_i(a_1) + P_i(a_2) + \dots + P_i(a_{n-1}) + P_i(a_n) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n P_i(x) = & (x - a_2) \dots (x - a_{n-1}) \cdot (x - a_n) + (x - a_1) \cdot (x - a_3) \dots (x - a_{n-1}) \cdot (x - a_n) + \dots \\ & + \dots + \\ & \dots + (x - a_1) \cdot (x - a_2) \dots (x - a_{n-2}) \cdot (x - a_n) + (x - a_1) \cdot (x - a_2) \dots (x - a_{n-1}) = P'(x) ; \end{aligned}$$

Sendo assim, podemos dizer que o item está correto.

e) (VERDADEIRO)

Justificativa: Sabemos que $P(x)$ tem grau n , e sendo $P_i(x) = \frac{P(x)}{x - a_i}$, teremos um grau de $P(x)$ reduzido, sendo assim $P_i(x)$ será de grau $n - 1$, e como $Q(x) = \sum_{i=1}^n P_i(x)$, $Q(x)$ terá grau $n - 1$.

f) (VERDADEIRO)

Justificativa: Temos que:

$$P_1(x) = \frac{(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_{n-1})(x - a_n)}{x - a_1} = (x - a_2) \dots (x - a_{n-1})(x - a_n)$$

$$P_2(x) = \frac{(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_{n-1})(x - a_n)}{x - a_2} = (x - a_1)(x - a_3) \dots (x - a_n)$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$P_{n-1}(x) = \frac{(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_{n-1})(x - a_n)}{x - a_{n-1}} = (x - a_1) \dots (x - a_{n-2})(x - a_n)$$

$$P_n(x) = \frac{(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_{n-1})(x - a_n)}{x - a_n} = (x - a_1) \dots (x - a_{n-2})(x - a_{n-1})$$

E temos que:

$$P'(a_1) = (a_1 - a_2) \dots (a_1 - a_{n-1})(a_1 - a_n) = (-1)^{n-1} \cdot (a_2 - a_1) \dots (a_{n-1} - a_1) \cdot (a_n - a_1)$$

$$P'(a_2) = (a_2 - a_1) \cdot (a_2 - a_3) \dots (a_2 - a_n) = (-1)^{n-2} \cdot (a_2 - a_1) \cdot (a_3 - a_2) \dots (a_n - a_2)$$

\vdots

$$P'(a_{n-1}) = (a_{n-1} - a_1) \dots (a_{n-1} - a_{n-2})(a_{n-1} - a_n) = (-1)^1 \cdot (a_{n-1} - a_1) \dots (a_{n-1} - a_{n-2}) \cdot (a_n - a_{n-1})$$

$$P'(a_n) = (-1)^0 \cdot (a_n - a_1) \cdot (a_n - a_2) \dots (a_n - a_{n-1})$$

$$\begin{aligned} Q(x) &= \sum_{i=1}^n \frac{P_i(x)}{P'(a_i)} = \frac{P_1(x)}{P'(a_1)} + \frac{P_2(x)}{P'(a_2)} + \dots + \frac{P_{n-1}(x)}{P'(a_{n-1})} + \frac{P_n(x)}{P'(a_n)} \\ &= \\ &(-1)^{n-1} \frac{(x - a_2) \dots (x - a_{n-1})(x - a_n)}{(a_2 - a_1) \dots (a_{n-1} - a_1)(a_n - a_1)} + (-1)^{n-2} \frac{(x - a_1)(x - a_3) \dots (x - a_n)}{(a_2 - a_1)(a_3 - a_2) \dots (a_n - a_2)} + \dots + \\ &\dots + (-1) \frac{(x - a_1) \dots (x - a_{n-2})(x - a_n)}{(a_{n-1} - a_1) \dots (a_{n-1} - a_{n-2})(a_n - a_{n-1})} + \frac{(x - a_1) \dots (x - a_{n-2})(x - a_{n-1})}{(a_n - a_1) \dots (a_n - a_{n-2})(a_n - a_{n-1})} \end{aligned}$$

Este somatório dá esperadamente 1, cheguei a essa conclusão depois de fazer os cálculos acima propostos para $n = 2, 3$ e 4 , não irei desenvolver a expressão acima em virtude dos cálculos serem extremamente grandes. Sento que poderia chegar a essa conclusão de outras formas.

Com a ajuda do gnuplot pude perceber que isso sempre acontece, veja os programas:

Polinômio $Q(x) = 1$, a partir de $P(x)$ de grau 2

```

a1=-6
a2=2
P(x)=(x-a1)*(x-a2)
P1(x)=(x-a2)
P2(x)=(x-a1)
derivadaP(x)=P1(x)+P2(x)
q1(x)=P1(x)/derivadaP(a1)
q2(x)=P2(x)/derivadaP(a2)
Q(x)=(q1(x)+q2(x))
plot P(x), derivadaP(x), Q(x), 0

```

Polinômio $Q(x) = 1$, a partir de $P(x)$ de grau 3

```

a1=-6
a2=2
a3=8
P(x)=(x-a1)*(x-a2)*(x-a3)
P1(x)=(x-a2)*(x-a3)
P2(x)=(x-a1)*(x-a3)
P3(x)=(x-a1)*(x-a2)
derivadaP(x)=P1(x)+P2(x)+P3(x)
q1(x)=P1(x)/derivadaP(a1)
q2(x)=P2(x)/derivadaP(a2)
q3(x)=P3(x)/derivadaP(a3)
Q(x)=(q1(x)+q2(x)+q3(x))
plot P(x), derivadaP(x), Q(x), 0

```

Polinômio $Q(x) = 1$, a partir de $P(x)$ de grau 4

```

a1=-6
a2=2
a3=8
a4=16
P(x)=(x-a1)*(x-a2)*(x-a3)*(x-a4)
P1(x)=(x-a2)*(x-a3)*(x-a4)
P2(x)=(x-a1)*(x-a3)*(x-a4)
P3(x)=(x-a1)*(x-a2)*(x-a4)
P4(x)=(x-a1)*(x-a2)*(x-a3)
derivadaP(x)=P1(x)+P2(x)+P3(x)+P4(x)
q1(x)=P1(x)/derivadaP(a1)
q2(x)=P2(x)/derivadaP(a2)
q3(x)=P3(x)/derivadaP(a3)
q4(x)=P4(x)/derivadaP(a4)
Q(x)=(q1(x)+q2(x)+q3(x)+q4(x))
plot P(x), derivadaP(x), Q(x), 0

```

Pela analogia do desenvolvimento que fiz para $n = 2, 3$ e 4 pude definir $Q(x)$ como:

$$Q(x) = \sum_{i=1}^n \frac{P_i(x)}{P'(a_i)} = 1$$

Portanto não é um polinômio do grau $n-1$, é um polinômio de grau zero. E não vale 1 em cada uma das raízes de P , o seu somatório é que dá 1.

g) (VERDADEIRO)

Justificativa: Pelo que vimos no item (h) da questão anterior, se tivermos $P(x)$ de grau $n-1$, i valores de x , tal que $i > n-1$, então teremos $P(x)$ constante. Porém nesta questão

temos que $Q(x) = \sum_{i=1}^n \frac{P_i(x)}{P'(a_i)} = 1$, que já sabemos da questão anterior que é constante e

igual a 1. Portanto o item não é errado, só causa uma lembrança do que acontece com

$P(x)$, quando já sabemos que $Q(x) = \sum_{i=1}^n \frac{P_i(x)}{P'(a_i)} = 1$.

h) (VERDADEIRO)

Justificativa: Temos que:

$$P_1(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{n-1})(x-a_n)}{x-a_1} = (x-a_2)\dots(x-a_{n-1})(x-a_n)$$

$$P_2(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{n-1})(x-a_n)}{x-a_2} = (x-a_1)(x-a_3)\dots(x-a_n)$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$P_{n-1}(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{n-1})(x-a_n)}{x-a_{n-1}} = (x-a_1)\dots(x-a_{n-2})(x-a_n)$$

$$P_n(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{n-1})(x-a_n)}{x-a_n} = (x-a_1)\dots(x-a_{n-2})(x-a_{n-1})$$

E temos que:

$$P'(a_1) = (a_1-a_2)\dots(a_1-a_{n-1})(a_1-a_n) = (-1)^{n-1} \cdot (a_2-a_1)\dots(a_{n-1}-a_1)(a_n-a_1)$$

$$P'(a_2) = (a_2-a_1)(a_2-a_3)\dots(a_2-a_n) = (-1)^{n-2} \cdot (a_2-a_1)(a_3-a_2)\dots(a_n-a_2)$$

\vdots

$$P'(a_{n-1}) = (a_{n-1}-a_1)\dots(a_{n-1}-a_{n-2})(a_{n-1}-a_n) = (-1)^1 \cdot (a_{n-1}-a_1)\dots(a_{n-1}-a_{n-2})(a_n-a_{n-1})$$

$$P'(a_n) = (-1)^0 \cdot (a_n-a_1)(a_n-a_2)\dots(a_n-a_{n-1})$$

$$\begin{aligned} Q(x) &= \sum_{i=1}^n \frac{P_i(x)}{P'(a_i)} = \frac{P_1(x)}{P'(a_1)} + \frac{P_2(x)}{P'(a_2)} + \dots + \frac{P_{n-1}(x)}{P'(a_{n-1})} + \frac{P_n(x)}{P'(a_n)} \\ &= \\ &(-1)^{n-1} \frac{(x-a_2)\dots(x-a_{n-1})(x-a_n)}{(a_2-a_1)\dots(a_{n-1}-a_1)(a_n-a_1)} + (-1)^{n-2} \frac{(x-a_1)(x-a_3)\dots(x-a_n)}{(a_2-a_1)(a_3-a_2)\dots(a_n-a_2)} + \dots + \\ &\quad + \\ &\dots + (-1) \frac{(x-a_1)\dots(x-a_{n-2})(x-a_n)}{(a_{n-1}-a_1)\dots(a_{n-1}-a_{n-2})(a_n-a_{n-1})} + \frac{(x-a_1)\dots(x-a_{n-2})(x-a_{n-1})}{(a_n-a_1)\dots(a_n-a_{n-2})(a_n-a_{n-1})} \end{aligned}$$

Este somatório dá esperadamente 1, cheguei a essa conclusão depois de fazer os cálculos acima propostos para $n = 2, 3$ e 4 , não irei desenvolver a expressão acima em virtude dos cálculos serem extremamente grandes. Sento que poderia chegar a essa conclusão de outras formas.

Com a ajuda do gnuplot pude perceber que isso sempre acontece, veja os programas:

Polinômio $Q(x) = 1$, a partir de $P(x)$ de grau 2

```

a1=-6
a2=2
P(x)=(x-a1)*(x-a2)
P1(x)=(x-a2)
P2(x)=(x-a1)
derivadaP(x)=P1(x)+P2(x)
q1(x)=P1(x)/derivadaP(a1)
q2(x)=P2(x)/derivadaP(a2)
Q(x)=(q1(x)+q2(x))
plot P(x), derivadaP(x), Q(x), 0

```

Polinômio $Q(x) = 1$, a partir de $P(x)$ de grau 3

```

a1=-6
a2=2
a3=8
P(x)=(x-a1)*(x-a2)*(x-a3)
P1(x)=(x-a2)*(x-a3)
P2(x)=(x-a1)*(x-a3)
P3(x)=(x-a1)*(x-a2)
derivadaP(x)=P1(x)+P2(x)+P3(x)
q1(x)=P1(x)/derivadaP(a1)
q2(x)=P2(x)/derivadaP(a2)
q3(x)=P3(x)/derivadaP(a3)
Q(x)=(q1(x)+q2(x)+q3(x))
plot P(x), derivadaP(x), Q(x), 0

```

Polinômio $Q(x) = 1$, a partir de $P(x)$ de grau 4

```

a1=-6
a2=2
a3=8
a4=16
P(x)=(x-a1)*(x-a2)*(x-a3)*(x-a4)
P1(x)=(x-a2)*(x-a3)*(x-a4)
P2(x)=(x-a1)*(x-a3)*(x-a4)
P3(x)=(x-a1)*(x-a2)*(x-a4)
P4(x)=(x-a1)*(x-a2)*(x-a3)
derivadaP(x)=P1(x)+P2(x)+P3(x)+P4(x)
q1(x)=P1(x)/derivadaP(a1)
q2(x)=P2(x)/derivadaP(a2)
q3(x)=P3(x)/derivadaP(a3)
q4(x)=P4(x)/derivadaP(a4)
Q(x)=(q1(x)+q2(x)+q3(x)+q4(x))
plot P(x), derivadaP(x), Q(x), 0

```

Pela analogia do desenvolvimento que fiz para $n = 2, 3$ e 4 pude definir $Q(x)$ como:

$$Q(x) = \sum_{i=1}^n \frac{P_i(x)}{P'(a_i)} = 1$$

Portanto não é um polinômio do grau $n-1$, é um polinômio de grau zero. E não vale 1 em cada uma das raízes de P , o seu somatório é que dá 1.

i)(VERDADEIRO)

Justificativa: Temos que:

$$P_1(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{n-1})(x-a_n)}{x-a_1} = (x-a_2)\dots(x-a_{n-1})(x-a_n)$$

$$P_2(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{n-1})(x-a_n)}{x-a_2} = (x-a_1)(x-a_3)\dots(x-a_n)$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$P_{n-1}(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{n-1})(x-a_n)}{x-a_{n-1}} = (x-a_1)\dots(x-a_{n-2})(x-a_n)$$

$$P_n(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{n-1})(x-a_n)}{x-a_n} = (x-a_1)\dots(x-a_{n-2})(x-a_{n-1})$$

E temos que:

$$P'(a_1) = (a_1-a_2)\dots(a_1-a_{n-1})(a_1-a_n) = (-1)^{n-1} \cdot (a_2-a_1)\dots(a_{n-1}-a_1) \cdot (a_n-a_1)$$

$$P'(a_2) = (a_2-a_1)(a_2-a_3)\dots(a_2-a_n) = (-1)^{n-2} \cdot (a_2-a_1) \cdot (a_3-a_2)\dots(a_n-a_2)$$

\vdots

$$P'(a_{n-1}) = (a_{n-1}-a_1)\dots(a_{n-1}-a_{n-2})(a_{n-1}-a_n) = (-1)^1 \cdot (a_{n-1}-a_1)\dots(a_{n-1}-a_{n-2}) \cdot (a_n-a_{n-1})$$

$$P'(a_n) = (-1)^0 \cdot (a_n-a_1)(a_n-a_2)\dots(a_n-a_{n-1})$$

$$\begin{aligned} Q(x) &= \sum_{i=1}^n \frac{h(a_i)P_i(x)}{P'(a_i)} = \frac{h(a_1) \cdot P_1(x)}{P'(a_1)} + \frac{h(a_2) \cdot P_2(x)}{P'(a_2)} + \dots + \\ &\quad \frac{h(a_{n-1}) \cdot P_{n-1}(x)}{P'(a_{n-1})} + \frac{h(a_n) \cdot P_n(x)}{P'(a_n)} \\ &= \\ &(-1)^{n-1} \frac{h(a_1) \cdot (x-a_2)\dots(x-a_{n-1})(x-a_n)}{(a_2-a_1)\dots(a_{n-1}-a_1)(a_n-a_1)} + (-1)^{n-2} \frac{h(a_2) \cdot (x-a_1)(x-a_3)\dots(x-a_n)}{(a_2-a_1)(a_3-a_2)\dots(a_n-a_2)} + \dots + \\ &\quad \dots + (-1) \frac{h(a_{n-1}) \cdot (x-a_1)\dots(x-a_{n-2})(x-a_n)}{(a_{n-1}-a_1)\dots(a_{n-1}-a_{n-2})(a_n-a_{n-1})} + \frac{h(a_n) \cdot (x-a_1)\dots(x-a_{n-2})(x-a_{n-1})}{(a_n-a_1)\dots(a_n-a_{n-2})(a_n-a_{n-1})} \end{aligned}$$

Analogamente ao item (i) da questão anterior não temos perspectivas de simplificação nos coeficientes de $Q(x)$ que muito provavelmente serão diferentes de zero e, portanto $Q(x)$ é um polinômio de grau $n-1$.

E como

$$Q(x) = \sum_{i=1}^n \frac{h(a_i)P_{\alpha}(x)}{P'(a_i)} = h(a_1) \frac{P_1(x)}{P'(a_1)} + h(a_2) \frac{P_2(x)}{P'(a_2)} + \dots +$$

$$h(a_{n-1}) \frac{P_{n-1}(x)}{P'(a_{n-1})} + h(a_n) \frac{P_n(x)}{P'(a_n)}$$

Podemos ver que $Q(a_1) = h(a_1)$, $Q(a_2) = h(a_2)$, ..., $Q(a_n) = h(a_n)$ e, portanto passa nos pontos:

$$(a_1, h(a_1)), (a_2, h(a_2)), \dots, (a_n, h(a_n))$$

Logo $Q(x)$ é um polinômio do grau $n - 1$ interpolando os pontos acima.