UEVA - UNIVERSIDADE ESTADUAL VALE DO ACARAÚ
DISCIPLINA DE CÁLCULO NUMÉRICO COMPUTACIONAL
Prof. Tarcísio Praciano Pereira.
Aluno: Francisco José Calixto de Sousa - 6° Período do Curso de Matemática

RESOLUÇÃO DA LISTA 04

1. Derivada algorítmica

(a) (Falso) Se f(x) = sin(x)*cos(x) então deveríamos ter
f′(x) = cos(x)*cos(x) + sin(x)*[-sin(x)] = f′(x) = $\cos^2(x)$ - $\sin^2(x)$.

(b) (Falso) Idem.

(c) (Verdadeiro) Se P(x) = (x + a)*(x + b)*(x + c) então
P′(x) = 1*[(x + b)*(x + c)] + (x + a)*[1*(x + c) + (x + b)*1] =
(x + b)*(x + c) + (x + a)*(x + c) + (x + a)*(x + b)

(d) (Falso) Se a < b < c e P(x) = (x + a)*(x + b)*(x + c) então P(x) = 0 terá raízes –a, –b e –c sendo –c < –b < –a, então o correto seria dizer que P′(x) terá exatamente duas raízes que ficam nos intervalos [–c , –b], [–b , –a]. Os próximos itens justificam este.

(e) (Verdadeiro) Considero este item correto embora o próximo especifique melhor o que de fato acontece.

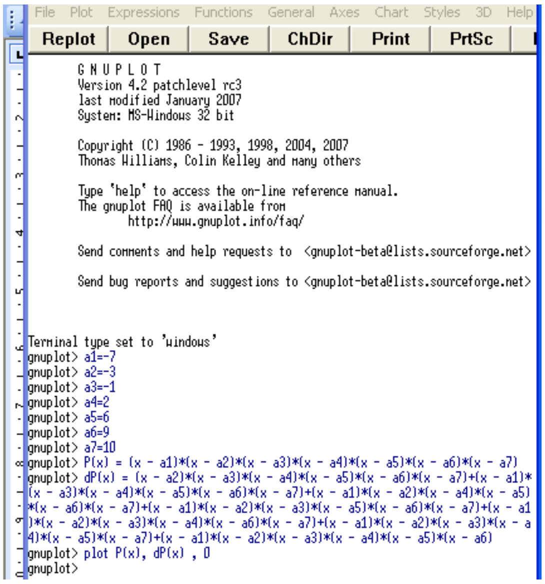
(f) (Verdadeiro) Este item vem a justificar alguns anteriores.

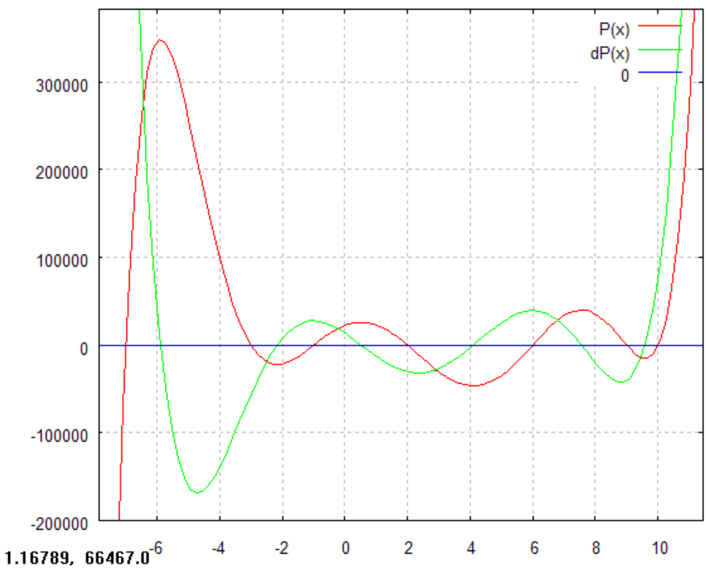
Se $(a_i)_{i=1,\dots,n}$ for uma sucessão estritamente crescente de números reais e se

$$P(x) = (x-a_1)\cdot\ldots\cdot(x-a_n) = \prod_{i=1}^{n}(x-a_i)$$

então P′(x) terá uma raiz em cada um dos n−1 intervalos determinados pelas raízes de P.

Vamos analisar um exemplo de P(x) sendo um produto de 7 determinados (x – a_i) e não de (x+a_i):

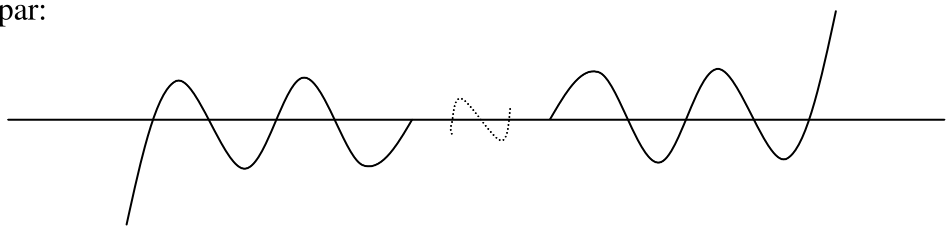




Entre cada intervalo determinado por raízes consecutivas do polinômio há necessariamente um extremo relativo, como vemos na figura. Portanto dP(x) terá todas as suas raízes nos 6 intervalos determinados pelas raízes de P(x), cada uma num intervalo. Como sabemos do Cálculo, cada extremo relativo determina um zero da função derivada do polinômio. O que torna isso verdade para um polinômio P de qualquer ordem.
Vamos fazer mais uma análise, como temos $a_1 < a_2 < ... < a_{n-1} < a_n$, P(x) tem grau n, e portanto possui n raízes. Considere os gráficos abaixo apenas para uma compreensão do que acontece.

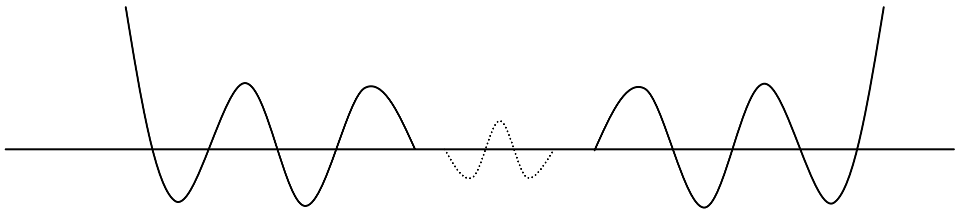
Como o coeficiente do termo de maior grau de P(x) é positivo, então temos:

Se n for ímpar:



Para $x < a_1$ e $a_i < x < a_{i+1}$, para i par, $1 < i < n$, teremos $P(x) < 0$ e
Para $a_i < x < a_{i+1}$ e $x > a_n$, para i ímpar, $1 \leq i < n$ teremos $P(x) > 0$

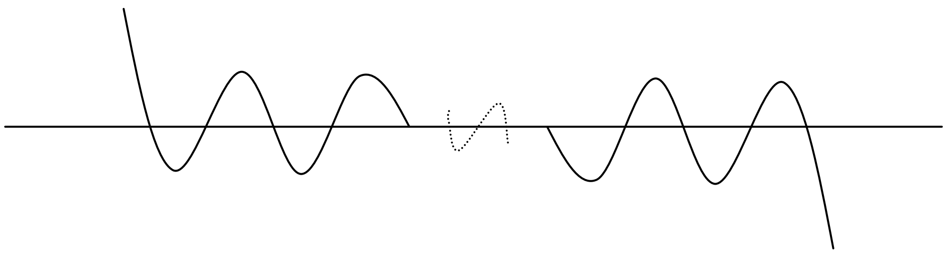
Se n for par:



Para $x < a_1$, $a_i < x < a_{i+1}$ e $x > a_n$ para i par, $1 < i < n$, teremos $P(x) > 0$ e
Para $a_i < x < a_{i+1}$, para i ímpar, $1 \leq i < n$ teremos $P(x) < 0$

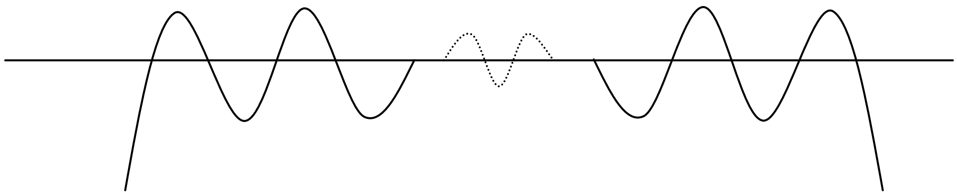
Vamos analisar outra visão que difere a deste problema. Se o coeficiente do termo de maior grau de P(x) fosse negativo, então teríamos:

Se n for ímpar:



Para $x < a_1$ e $a_i < x < a_{i+1}$, para i par, $1 < i < n$, teremos $P(x) > 0$ e
Para $a_i < x < a_{i+1}$ e $x > a_n$, para i ímpar, $1 \leq i < n$ teremos $P(x) < 0$

Se n for par:



Para $x < a_1$, $a_i < x < a_{i+1}$ e $x > a_n$ para i par, $1 < i < n$, teremos $P(x) < 0$ e
Para $a_i < x < a_{i+1}$, para i ímpar, $1 \leq i < n$ teremos $P(x) > 0$

2. Interpolação polinomial
(a) (Verdadeiro)

Dados $a < b < c$ e se
$$P(x) = (x - a)*(x - b)*(x - c)$$
então $P'(\alpha) \neq 0$ para todo $\alpha \in \{a, b, c\}$.

Se $P(x) = (x - a)*(x - b)*(x - c)$ então
$P'(x) = 1*[(x - b)*(x - c)] + (x - a)*[1*(x - c) + (x - b)*1] =$
$(x - b)*(x - c) + (x - a)*(x - c) + (x - a)*(x - b)$

$P'(a) = (a - b)*(a - c) + (a - a)*(a - c) + (a - a)*(a - b) = (a - b)*(a - c) \neq 0$
$P'(b) = (b - b)*(b - c) + (b - a)*(b - c) + (b - a)*(b - b) = (b - a)*(b - c) \neq 0$
$P'(c) = (c - b)*(c - c) + (c - a)*(c - c) + (c - a)*(c - b) = (c - a)*(c - b) \neq 0$

(b) (Verdadeiro)

Dados $a < b < c$ e se
$$P(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$$
Notação: $P_a(x) = \dfrac{P(x)}{x-a}$ então $P'(x) = \sum_{\alpha\in\{a,b,c\}} P_\alpha(x)$

Queremos mostrar que $P'(x) = (x - b)(x - c) + (x - a)(x - c) + (x - a)(x - b) = \sum_{\alpha\in\{a,b,c\}} P_\alpha(x)$

$$P_a(x) = \frac{P(x)}{x-a} \qquad P_b(x) = \frac{P(x)}{x-b} \qquad P_c(x) = \frac{P(x)}{x-c}$$

$$P_a(x) = \frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{x-a} = (x-b)(x-c)$$

$$P_b(x) = \frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{x-b} = (x-a)(x-c)$$

$$P_c(x) = \frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{x-c} = (x-a)(x-b)$$

$P'(x) = \sum_{\alpha\in\{a,b,c\}} P_\alpha(x) = P_a(x) + P_b(x) + P_c(x) = (x - b)(x - c) + (x - a)(x - c) + (x - a)(x - b)$
Como queríamos mostrar.

(c) (Verdadeiro)

Dados $a < b < c$ e se $P(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$. O grau de $Q(x) = \sum_{\alpha\in\{a,b,c\}} P_\alpha(x)$ é 2.

Notação: $P_a(x) = \dfrac{P(x)}{x-a}$

Temos que mostrar que o grau de Q(x) = $\sum_{\alpha\in\{a,b,c\}} P_\alpha(x)$ é 2, vejamos:

Q(x) = $\sum_{\alpha\in\{a,b,c\}} P_\alpha(x)$ = P'(x) = (x – b)(x – c) + (x – a)(x – c) + (x – a)(x – b) =

$= 3x^2 - 2x(a+b+c) + (ac+ab+bc)$, um polinômio do segundo grau, como queríamos mostrar.

(d) (Falso)

Dados a < b < c e se P(x) = (x – a)(x – b)(x – c). Defina Q(x) = $\sum_{\alpha\in\{a,b,c\}} \dfrac{P_\alpha(x)}{P'(\alpha)}$. Então Q é um polinômio de grau 2 que vale 1 em cada uma das raízes de P. Notação: $P_a(x) = \dfrac{P(x)}{x-a}$

Vamos definir Q(x):
Temos que:

$$P_a(x) = \frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{x-a} = (x-b)(x-c)$$

$$P_b(x) = \frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{x-b} = (x-a)(x-c)$$

$$P_c(x) = \frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{x-c} = (x-a)(x-b)$$

E temos que:
P'(x) = (x – b)(x – c) + (x – a)(x – c) + (x – a)(x – b)
P'(a) = (a – b)(a – c) + (a – a)(a – c) + (a – a)(a – b) = (a – b)(a – c)
P'(b) = (b – b)(b – c) + (b – a)(b – c) + (b – a)(b – b) = (b – a)(b – c)
P'(c) = (c – b)(c – c) + (c – a)(c – c) + (c – a)(c – b) = (c – a)(c – b)

$$Q(x) = \sum_{\alpha\in\{a,b,c\}} \frac{P_\alpha(x)}{P'(\alpha)} = \frac{P_a(x)}{P'(a)} + \frac{P_b(x)}{P'(b)} + \frac{P_c(x)}{P'(c)} = \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} =$$

$$= \frac{(x-b)(x-c)(c-b)}{[(-1)(b-a)][(-1)(c-a)](c-b)} + \frac{(x-a)(x-c)(c-a)}{(b-a)[(-1)(c-b)](c-a)} + \frac{(x-a)(x-b)(b-a)}{(c-a)(c-b)(b-a)} =$$

$$= \frac{(x-b)(x-c)(c-b)}{(b-a)(c-a)(c-b)} - \frac{(x-a)(x-c)(c-a)}{(b-a)(c-b)(c-a)} + \frac{(x-a)(x-b)(b-a)}{(c-a)(c-b)(b-a)} =$$

$$= \frac{(x-b)(x-c)(c-b) - (x-a)(x-c)(c-a) + (x-a)(x-b)(b-a)}{(c-a)(c-b)(b-a)} =$$

$$= \frac{[x^2-(b+c)x+bc](c-b) - [x^2-(a+c)x+ac](c-a) + [x^2-(a+b)x+ab](b-a)}{(c-a)(c-b)(b-a)} =$$

$$= \frac{x^2[(c-b)-(c-a)+(b-a)] - x[(b+c)(c-b)-(a+c)(c-a)+(a+b)(b-a)] + [bc(c-b)-ac(c-a)+ab(b-a)]}{(c-a)(c-b)(b-a)} =$$

$$= \frac{x^2(c-b-c+a+b-a) - x(c^2-b^2-c^2+a^2+b^2-a^2) + (bc^2-b^2c-ac^2+a^2c+ab^2-a^2b)}{(c-a)(c-b)(b-a)} =$$

$$= \frac{(bc^2 - b^2c - ac^2 + a^2c + ab^2 - a^2b)}{(c-a)(c-b)(b-a)} = \frac{(bc^2 - b^2c - ac^2 + a^2c + ab^2 - a^2b)}{(c^2 - bc - ac + ab)(b-a)} =$$

$$= \frac{(bc^2 - b^2c - ac^2 + a^2c + ab^2 - a^2b)}{(bc^2 - b^2c - abc + ab^2 - ac^2 + abc + a^2c - a^2b)} = \frac{(bc^2 - b^2c - ac^2 + a^2c + ab^2 - a^2b)}{(bc^2 - b^2c + ab^2 - ac^2 + a^2c - a^2b)} = 1$$

Então definimos Q(x) como: Q(x) = $\frac{a^2}{P'(a)} + \frac{b^2}{P'(b)} + \frac{c^2}{P'(c)} = \sum_{\alpha \in \{a,b,c\}} \frac{\alpha^2}{P'(\alpha)} = 1$

Portanto não é um polinômio do segundo grau, é um polinômio de grau zero. E não vale 1 em cada uma das raízes de P, o seu somatório é que dá 1.

(e) (Verdadeiro)

Dados dois pontos existe uma única função do primeiro grau que passa por estes pontos.

Se temos dois pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1) distintos, com suas coordenadas reais, então a partir da estrutura da função de grau 1: $y = a_1x + a_0$ e destes dois pontos poderemos obter os coeficientes a_1, a_0 com a solução do sistema linear abaixo, veja:

$$\begin{cases} y_0 = a_1x_0 + a_0 \\ y_1 = a_1x_1 + a_0 \end{cases}$$

Portanto teremos uma única função do primeiro grau com coeficientes a_1, a_0 determinados na solução do sistema linear acima, que passa por estes pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1).

(f) (Verdadeiro)

Dados três pontos existe uma única função do segundo grau que passa por estes pontos.

Se temos três pontos $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ e (x_2, y_2) distintos, com suas coordenadas reais, então a partir da estrutura da função de grau 2: $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$ e destes três pontos poderemos obter os coeficientes a_2, a_1, a_0 com a solução do sistema linear abaixo, veja:

$$\begin{cases} y_0 = a_2{x_0}^2 + a_1x_0 + a_0 \\ y_1 = a_2{x_1}^2 + a_1x_1 + a_0 \\ y_2 = a_2{x_2}^2 + a_1x_2 + a_0 \end{cases}$$

Portanto teremos uma única função do segundo grau com coeficientes a_2, a_1, a_0 determinados na solução do sistema linear acima, que passa por estes pontos $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ e (x_2, y_2).

(g) (Verdadeiro)

Dados n pontos existe uma única função do grau n − 1 que passa por estes pontos.

Se temos n pontos $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ ... (x_{n-1}, y_{n-1}) distintos, com suas coordenadas reais, então a partir da estrutura da função de grau n − 1: $y = a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$ e destes n pontos poderemos obter os coeficientes $a_n, ..., a_1, a_0$ com a solução do sistema linear abaixo, veja:

$$\begin{cases} y_0 = a_{n-1}{x_0}^{n-1} + ... + a_1x_0 + a_0 \\ y_1 = a_{n-1}{x_1}^{n-1} + ... + a_1x_1 + a_0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{n-1} = a_{n-1}{x_{n-1}}^{n-1} + ... + a_1x_{n-1} + a_0 \end{cases}$$

Portanto teremos uma única função do grau n – 1 com coeficientes $a_n,...,a_1,a_0$ determinados na solução do sistema linear acima, que passa por estes pontos $(x_0,y_0),(x_1,y_1)\ ...\ (x_{n-1},y_{n-1})$.

(h)

Se um polinômio P, do grau menor ou igual n – 1, assumir n vezes o mesmo valor então P é constante e de grau zero.

Podemos observar o seguinte:

- Num polinômio de grau 2, temos o gráfico de uma parábola, onde no máximo podemos encontrar dois valores x_0,x_1, tais que $P(x_0)=P(x_1)$;
- Num polinômio de grau 3, temos o gráfico onde no máximo podemos encontrar três valores x_0,x_1,x_2, tais que $P(x_0)=P(x_1)=P(x_2)$;
- ⋮
- Num polinômio de grau n, temos o gráfico onde no máximo podemos encontrar n valores $x_0,x_1,...,x_{n-1}$, tais que $P(x_0)=P(x_1)=...=P(x_{n-1})$;

Se temos um polinômio de grau menor ou igual n – 1, como por exemplo:

$$P(x)=a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$$

E sabemos que $P(x_n) = ... = P(x_2) = P(x_1) = k$ para $x_n \neq ... \neq x_2 \neq x_1$, é constante então necessariamente $P(x) = k = a_0$, um polinômio constante. Vejamos:

$$\begin{cases} k=a_{n-1}x_0^{\ n-1}+...+a_1x_0^{\ 1}+a_0x_0^{\ 0} \\ k=a_{n-1}x_1^{\ n-1}+...+a_1x_1^{\ 1}+a_0x_1^{\ 0} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ k=a_{n-1}x_n^{\ n-1}+...+a_1x_n^{\ 1}+a_0x_n^{\ 0} \end{cases}$$

$$k = (a_{n-1}x_0^{\ n-1}+...+a_1x_0^{\ 1}+a_0x_0^{\ 0})=(a_{n-1}x_1^{\ n-1}+...+a_1x_1^{\ 1}+a_0x_1^{\ 1})=...=(a_{n-1}x_n^{\ n-1}+...+a_1x_n^{\ 1}+a_0x_n^{\ 1})$$

$$\left\langle (a_{n-1},...,a_1,a_0),(x_0^{\ n-1},x_0^{\ 1},...,x_0^{\ 0})\right\rangle=\left\langle (a_{n-1},...,a_1,a_0),(x_1^{\ n-1},x_1^{\ 1},...,x_1^{\ 0})\right\rangle=...=\left\langle (a_{n-1},...,a_1,a_0),(x_n^{\ n-1},x_n^{\ 1},...,x_n^{\ 0})\right\rangle$$

$$\left\langle \vec{A},\vec{X}_0\right\rangle=\left\langle \vec{A},\vec{X}_1\right\rangle=...=\left\langle \vec{A},\vec{X}_n\right\rangle$$

Daí tiramos a conclusão que: $\vec{X}_0=\vec{X}_1=...=\vec{X}_n$ e portanto:

$$x_0^{\ n-1}=x_1^{\ n-1}=...=x_n^{\ n-1},\quad ...\quad ,\quad x_0^{\ 1}=x_1^{\ 1}=...=x_n^{\ 1},\qquad x_0^{\ 0}=x_1^{\ 0}=...=x_n^{\ 0}$$

Em outras palavras as expressões acima querem dizer: $x_0 = x_1 = ... = x_n$ o que não é verdade pois vimos acima que $x_n \neq ... \neq x_2 \neq x_1$. Logo para que $\langle \vec{A}, \vec{X}_0 \rangle = \langle \vec{A}, \vec{X}_1 \rangle = ... = \langle \vec{A}, \vec{X}_n \rangle$ sejam verdade é necessário que $\vec{A} = (0,...,0,a_0)$ restando apenas k = $\langle \vec{A}, \vec{X}_0 \rangle = \langle \vec{A}, \vec{X}_1 \rangle = ... = \langle \vec{A}, \vec{X}_n \rangle$ = a_0.
Portanto P(x) = a_0, um polinômio constante e de grau zero.

(i) (Verdadeira)

> Dados a < b < c e se P(x) = (x − a)(x − b)(x − c). Defina Q(x) = $\sum_{\alpha \in \{a,b,c\}} \frac{P_\alpha(x)}{P'(\alpha)}$. Então Q é constante igual a 1.
> Notação: $P_a(x) = \frac{P(x)}{x-a}$

Pelo que vimos na resolução acima do item (d) o polinômio Q(x) é constante e igual a 1. Reveja:
Vamos definir Q(x):
Temos que:

$$P_a(x) = \frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{x-a} = (x-b)(x-c)$$
$$P_b(x) = \frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{x-b} = (x-a)(x-c)$$
$$P_c(x) = \frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{x-c} = (x-a)(x-b)$$

E temos que:
P'(x) = (x − b)(x − c) + (x − a)(x − c) + (x − a)(x − b)
P'(a) = (a − b)(a − c) + (a − a)(a − c) + (a − a)(a − b) = (a − b)(a − c)
P'(b) = (b − b)(b − c) + (b − a)(b − c) + (b − a)(b − b) = (b − a)(b − c)
P'(c) = (c − b)(c − c) + (c − a)(c − c) + (c − a)(c − b) = (c − a)(c − b)

$$Q(x) = \sum_{\alpha \in \{a,b,c\}} \frac{P_\alpha(x)}{P'(\alpha)} = \frac{P_a(x)}{P'(a)} + \frac{P_b(x)}{P'(b)} + \frac{P_c(x)}{P'(c)} = \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} =$$
$$= \frac{(x-b)(x-c)(c-b)}{[(-1)(b-a)][(-1)(c-a)](c-b)} + \frac{(x-a)(x-c)(c-a)}{(b-a)[(-1)(c-b)](c-a)} + \frac{(x-a)(x-b)(b-a)}{(c-a)(c-b)(b-a)} =$$
$$= \frac{(x-b)(x-c)(c-b)}{(b-a)(c-a)(c-b)} - \frac{(x-a)(x-c)(c-a)}{(b-a)(c-b)(c-a)} + \frac{(x-a)(x-b)(b-a)}{(c-a)(c-b)(b-a)} =$$
$$= \frac{(x-b)(x-c)(c-b) - (x-a)(x-c)(c-a) + (x-a)(x-b)(b-a)}{(c-a)(c-b)(b-a)} =$$
$$= \frac{[x^2-(b+c)x+bc](c-b) - [x^2-(a+c)x+ac](c-a) + [x^2-(a+b)x+ab](b-a)}{(c-a)(c-b)(b-a)} =$$
$$= \frac{x^2[(c-b)-(c-a)+(b-a)] - x[(b+c)(c-b)-(a+c)(c-a)+(a+b)(b-a)] + [bc(c-b)-ac(c-a)+ab(b-a)]}{(c-a)(c-b)(b-a)} =$$
$$= \frac{x^2(c-b-c+a+b-a) - x(c^2-b^2-c^2+a^2+b^2-a^2) + (bc^2-b^2c-ac^2+a^2c+ab^2-a^2b)}{(c-a)(c-b)(b-a)} =$$

$$= \frac{(bc^2 - b^2c - ac^2 + a^2c + ab^2 - a^2b)}{(c-a)(c-b)(b-a)} = \frac{(bc^2 - b^2c - ac^2 + a^2c + ab^2 - a^2b)}{(c^2 - bc - ac + ab)(b-a)} =$$

$$= \frac{(bc^2 - b^2c - ac^2 + a^2c + ab^2 - a^2b)}{(bc^2 - b^2c - abc + ab^2 - ac^2 + abc + a^2c - a^2b)} = \frac{(bc^2 - b^2c - ac^2 + a^2c + ab^2 - a^2b)}{(bc^2 - b^2c + ab^2 - ac^2 + a^2c - a^2b)} = 1$$

Então definimos Q(x) como: $Q(x) = \frac{a^2}{P'(a)} + \frac{b^2}{P'(b)} + \frac{c^2}{P'(c)} = \sum_{\alpha \in \{a,b,c\}} \frac{\alpha^2}{P'(\alpha)} = 1$

(j) (Verdadeiro)

Polinômio de Lagrange

Dados a < b < c e se

$$P(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$$

Considere uma função $h : \alpha \in \{a,b,c\} \mapsto h(\alpha) \in \Re$

Quer dizer que os números h(a), h(b), h(c) são dados.

Defina

$$Q(x) = \sum_{\alpha \in \{a,b,c\}} \frac{h(\alpha)P_\alpha(x)}{P'(\alpha)}.$$

então Q(α) = h(α). Logo Q é um polinômio de grau 2 passa nos pontos

(a, h(a)), (b, h(b)), (c, h(c))

Em outras palavras, Q é um polinômio de grau 2 interpolando os pontos

(a, h(a)), (b, h(b)), (c, h(c))

Notação: $P_a(x) = \frac{P(x)}{x-a}$

Vamos definir Q(x):

Temos que:

$$P_a(x) = \frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{x-a} = (x-b)(x-c)$$

$$P_b(x) = \frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{x-b} = (x-a)(x-c)$$

$$P_c(x) = \frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{x-c} = (x-a)(x-b)$$

E temos que:

P’(x) = (x – b)(x – c) + (x – a)(x – c) + (x – a)(x – b)

P’(a) = (a – b)(a – c) + (a – a)(a – c) + (a – a)(a – b) = (a – b)(a – c)

P’(b) = (b – b)(b – c) + (b – a)(b – c) + (b – a)(b – b) = (b – a)(b – c)

P’(c) = (c – b)(c – c) + (c – a)(c – c) + (c – a)(c – b) = (c – a)(c – b)

$$Q(x) = \sum_{\alpha \in \{a,b,c\}} \frac{h(\alpha)P_\alpha(x)}{P'(\alpha)} = \frac{h(a)P_a(x)}{P'(a)} + \frac{h(b)P_b(x)}{P'(b)} + \frac{h(c)P_c(x)}{P'(c)} =$$

$$= h(a)\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + h(b)\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + h(c)\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} =$$

$$= \frac{h(a)(x-b)(x-c)(c-b)}{[(-1)(b-a)][(-1)(c-a)](c-b)} + \frac{h(b)(x-a)(x-c)(c-a)}{(b-a)[(-1)(c-b)](c-a)} + \frac{h(c)(x-a)(x-b)(b-a)}{(c-a)(c-b)(b-a)} =$$

$$= \frac{h(a)(x-b)(x-c)(c-b)}{(b-a)(c-a)(c-b)} - \frac{h(b)(x-a)(x-c)(c-a)}{(b-a)(c-b)(c-a)} + \frac{h(c)(x-a)(x-b)(b-a)}{(c-a)(c-b)(b-a)} =$$

$$= \frac{h(a)(x-b)(x-c)(c-b) - h(b)(x-a)(x-c)(c-a) + h(c)(x-a)(x-b)(b-a)}{(c-a)(c-b)(b-a)} =$$

$$= \frac{[x^2-(b+c)x+bc][h(a)(c-b)] - [x^2-(a+c)x+ac][h(b)(c-a)] + [x^2-(a+b)x+ab][h(c)(b-a)]}{(c-a)(c-b)(b-a)} =$$

$$= \frac{x^2[h(a)(c-b) - h(b)(c-a) + h(c)(b-a)]}{(c-a)(c-b)(b-a)}$$

$$- \frac{x[(b+c)h(a)(c-b) - (a+c)h(b)(c-a) + (a+b)h(c)(b-a)]}{(c-a)(c-b)(b-a)} +$$

$$+ \frac{[bc.h(a)(c-b) - ac.h(b)(c-a) + ab.h(c)(b-a)]}{(c-a)(c-b)(b-a)}$$

$$= x^2\left[\frac{h(a)}{(c-a)(b-a)} - \frac{h(b)}{(c-b)(b-a)} + \frac{h(c)}{(c-a)(c-b)}\right]$$

$$- x\left[\frac{h(a)(c^2-b^2) - h(b)(c^2-a^2) + h(c)(b^2-a^2)}{(c-a)(c-b)(b-a)}\right] +$$

$$+ \left[\frac{bc.h(a)(c-b) - ac.h(b)(c-a) + ab.h(c)(b-a)}{(c-a)(c-b)(b-a)}\right]$$

Como vemos não temos perspectivas de simplificação nos coeficientes de Q(x) que muito provavelmente serão diferentes de zero e, portanto Q(x) é um polinômio de grau 2.

E como

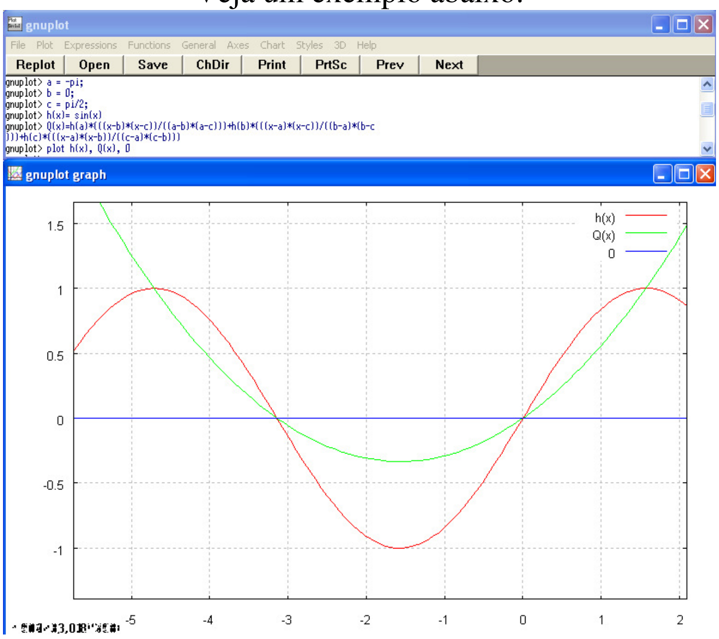
Q(x) = $\displaystyle\sum_{\alpha\in\{a,b,c\}} \frac{h(\alpha)P_\alpha(x)}{P'(\alpha)} = h(a)\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + h(b)\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + h(c)\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$

Podemos ver que Q(a) = h(a), Q(b) = h(b) e Q(c) = h(c) e, portanto passa nos pontos:

(a, h(a)), (b, h(b)), (c, h(c))

Logo Q(x) é um polinômio do segundo grau interpolando os pontos acima.

Veja um exemplo abaixo:



3. Polinômio passando por n pontos
(a) (Verdadeiro)

Se $(a_i)_{i=1,\ldots n}$ for uma sucessão estritamente crescente de números reais e se

$$P(x)=(x-a_1)\cdot\ldots\cdot(x-a_n)=\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)$$

Então $P'(a_i) \neq 0$ para todo $i = 0,\ldots, n$.

Se $P(x) = (x - a_1)\ldots(x - a_n) = (x - a_1).[(x - a_2)\ldots(x - a_n)]$ então
$P'(x) = 1.[(x - a_2)\ldots(x - a_n)] + (x - a_1) . D_1$
$D_1 = 1.[(x - a_3)\ldots(x - a_n)] + (x - a_2) . D_2$
$D_2 = 1.[(x - a_4)\ldots(x - a_n)] + (x - a_3) . D_3$
$\vdots$
$D_{n-2} = 1.[(x - a_{n-1}).(x - a_n)] + (x - a_{n-2}) . D_{n-1}$
$D_{n-1} = 1.(x - a_n) + (x - a_{n-1}) . D_n$
$D_n = 1$
Em outras palavras,

$$P'(x) = (x - a_2)\ldots(x - a_{n-1}).(x - a_n) + (x - a_1).(x - a_3)\ldots(x - a_{n-1}).(x - a_n) + \ldots$$
$$+ \ldots +$$
$$\ldots + (x - a_1).(x - a_2)\ldots (x - a_{n-2}).(x - a_n) + (x - a_1).(x - a_2)\ldots(x - a_{n-1})$$

Portanto, quando tivermos
$P'(a_1) = (a_1- a_2)\ldots(a_1- a_{n-1}).(a_1 - a_n) \neq 0$
$P'(a_2) = (a_2 - a_1).(a_2 - a_3)\ldots(a_2 - a_n) \neq 0$
$\vdots$
$P'(a_{n-1}) = (a_{n-1} - a_1)\ldots(a_{n-1} - a_{n-2}).(a_{n-1} - a_n) \neq 0$
$P'(a_n) = (a_n - a_1).(a_n - a_2)\ldots(a_n - a_{n-1}) \neq 0$

Teremos $P'(a_i) \neq 0$ para todo $i = 0,\ldots, n$.

(b) (Verdadeiro)

Considere $a < b < c$ e $P(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$ então $P'(x_0) \neq 0$ para todo $x_0 \in \{a, b, c\}$.

Se $P(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$ então
$P'(x) = 1*[(x - b)*(x - c)] + (x - a)*[1*(x - c) + (x - b)*1] =$
$(x - b)*(x - c) + (x - a)*(x - c) + (x - a)*(x - b)$

$P'(a) = (a - b)*(a - c) + (a - a)*(a - c) + (a - a)*(a - b) = (a - b)*(a - c) \neq 0$
$P'(b) = (b - b)*(b - c) + (b - a)*(b - c) + (b - a)*(b - b) = (b - a)*(b - c) \neq 0$
$P'(c) = (c - b)*(c - c) + (c - a)*(c - c) + (c - a)*(c - b) = (c - a)*(c - b) \neq 0$

(c) (Falso) Justificado no próximo item.

(d) (Verdadeiro)

Seja $(a_i)_{i=1,\ldots n}$ uma sucessão estritamente crescente de números reais e

$$P(x)=(x-a_1)\cdot\ldots\cdot(x-a_n)=\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)$$

Notação: $P_i(x) = \dfrac{P(x)}{x-a_i}$ então $P'(x) = \sum_{i=1}^{n} P_i(x)$

Temos $P(x) = (x-a_1)\cdot\ldots\cdot(x-a_n) = \prod_{i=1}^{n}(x-a_i)$ e do item (a) que

$$P'(x) = (x - a_2)\ldots(x - a_{n-1}).(x - a_n) + (x - a_1).(x - a_3)\ldots(x - a_{n-1}).(x - a_n) + \ldots$$
$$+ \ldots +$$
$$\ldots + (x - a_1).(x - a_2)\ldots (x - a_{n-2}).(x - a_n) + (x - a_1).(x - a_2)\ldots(x - a_{n-1})$$

Queremos mostrar que $P'(x) = \sum_{i=1}^{n} P_i(x) = \dfrac{(x-a_1)\cdot\ldots\cdot(x-a_n)}{x-a_1} + \dfrac{(x-a_1)(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_n)}{x-a_2}$
$+ \ldots + \dfrac{(x-a_1)\cdot\ldots\cdot(x-a_{n-1})(x-a_n)}{x-a_{n-1}} + \dfrac{(x-a_1)\cdot\ldots\cdot(x-a_n)}{x-a_n} = (x - a_2)\ldots(x - a_{n-1}).(x - a_n) +$
$+ (x - a_1).(x - a_3)\ldots(x - a_n) + \ldots + (x - a_1).(x - a_2)\ldots(x - a_{n-2}).(x - a_n) + (x - a_1).(x - a_2)\ldots(x - a_{n-1})$

E portanto chegamos a forma derivada de P(x) que já tínhamos do item (a) podendo dizer que $P'(x) = \sum_{i=1}^{n} P_i(x)$.

(e) (Verdadeira)

Seja $(a_i)_{i=1,\ldots n}$ uma sucessão estritamente crescente de números reais e

$$P(x) = (x-a_1)\cdot\ldots\cdot(x-a_n) = \prod_{i=1}^{n}(x-a_i)$$

Com a Notação: $P_i(x) = \dfrac{P(x)}{x-a_i}$

O grau de $Q(x) = \sum_{i=1}^{n} P_i(x)$ é n − 1.

De forma lógica podemos deduzir que o grau de Q(x) é n − 1.
Vejamos, P(x) é um polinômio de grau n. Se Q(x) é um polinômio formado pela soma de polinômios $P_i(x)$ que são de grau n − 1 então podemos crer que Q(x) é de grau n − 1.

(f) (Falso)

Seja $(a_i)_{i=1,\ldots n}$ uma sucessão estritamente crescente de números reais e

$$P(x) = (x-a_1)\cdot\ldots\cdot(x-a_n) = \prod_{i=1}^{n}(x-a_i)$$

Com a Notação: $P_i(x) = \dfrac{P(x)}{x-a_i}$

Defina $Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{P_i(x)}{P'(a_i)}$ então Q é um polinômio de grau n - 1 que vale 1 em cada uma das raízes de P.

Uma forma de concluir que Q(x) é um polinômio de grau menos ou igual a n – 1, é observar que $Q(a_1) = 1$, $Q(a_2) = 1$, ... , $Q(a_n) = 1$, e quando temos n pontos com seu Q(x) presumidamente de

grau n – 1 é igual a 1, concluímos que Q(x) é constante e igual a 1. Outra forma de concluir isso é dada a seguir, vamos definir Q(x):
Temos que:

$$P_1(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_{n-1})(x-a_n)}{x-a_1} = (x-a_2)...(x-a_{n-1})(x-a_n)$$

$$P_2(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_{n-1})(x-a_n)}{x-a_2} = (x-a_1)(x-a_3)...(x-a_n)$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$P_{n-1}(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_{n-1})(x-a_n)}{x-a_{n-1}} = (x-a_1)...(x-a_{n-2})(x-a_n)$$

$$P_n(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_{n-1})(x-a_n)}{x-a_n} = (x-a_1)...(x-a_{n-2})(x-a_{n-1})$$

E temos que:
$P'(a_1) = (a_1 - a_2)...(a_1 - a_{n-1}).(a_1 - a_n) = (-1)^{n-1}.(a_2 - a_1)...(a_{n-1} - a_1).(a_n - a_1)$
$P'(a_2) = (a_2 - a_1).(a_2 - a_3)...(a_2 - a_n) = (-1)^{n-2}.(a_2 - a_1).(a_3 - a_2)...(a_n - a_2)$
$\vdots$
$P'(a_{n-1}) = (a_{n-1} - a_1)...(a_{n-1} - a_{n-2}).(a_{n-1} - a_n) = (-1)^1.(a_{n-1} - a_1)...(a_{n-1} - a_{n-2}).(a_n - a_{n-1})$
$P'(a_n) = (-1)^0.(a_n - a_1).(a_n - a_2)...(a_n - a_{n-1})$

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i(x)}{P'(a_i)} = \frac{P_1(x)}{P'(a_1)} + \frac{P_2(x)}{P'(a_2)} + ... + \frac{P_{n-1}(x)}{P'(a_{n-1})} + \frac{P_n(x)}{P'(a_n)}$$

$$= (-1)^{n-1} \frac{(x-a_2)...(x-a_{n-1})(x-a_n)}{(a_2-a_1)...(a_{n-1}-a_1)(a_n-a_1)} + (-1)^{n-2} \frac{(x-a_1)(x-a_3)...(x-a_n)}{(a_2-a_1)(a_3-a_2)...(a_n-a_2)} + ... +$$
$$+ ... + (-1)\frac{(x-a_1)...(x-a_{n-2})(x-a_n)}{(a_{n-1}-a_1)...(a_{n-1}-a_{n-2})(a_n-a_{n-1})} + \frac{(x-a_1)...(x-a_{n-2})(x-a_{n-1})}{(a_n-a_1)...(a_n-a_{n-2})(a_n-a_{n-1})}$$

Este somatório dá esperadamente 1, cheguei a essa conclusão depois de fazer os cálculos acima propostos para n = 2 , 3 e 4, não irei desenvolver a expressão acima em virtude dos cálculos serem extremamente grandes. Sento que poderia chegar a essa conclusão de outras formas.
Com a ajuda do gnuplot pude perceber que isso sempre acontece, veja os programas:

<u>Polinômio Q(x) = 1, a partir de P(x) de grau 2</u>

```
a1=-6
a2=2
P(x)=(x-a1)*(x-a2)
P1(x)= (x-a2)
P2(x)= (x-a1)
derivadaP(x)=P1(x)+P2(x)
q1(x)=P1(x)/ derivadaP(a1)
q2(x)=P2(x)/ derivadaP(a2)
Q(x)=(q1(x)+q2(x))
```

plot P(x), derivadaP(x), Q(x), 0

<u>Polinômio Q(x) = 1, a partir de P(x) de grau 3</u>

a1=-6
a2=2
a3=8
P(x)=(x-a1)*(x-a2)*(x-a3)
P1(x)= (x-a2)*(x-a3)
P2(x)= (x-a1)*(x-a3)
P3(x)= (x-a1)*(x-a2)
derivadaP(x)=P1(x)+P2(x)+P3(x)
q1(x)=P1(x)/ derivadaP(a1)
q2(x)=P2(x)/ derivadaP(a2)
q3(x)=P3(x)/ derivadaP(a3)
Q(x)=(q1(x)+q2(x)+q3(x))
plot P(x), derivadaP(x), Q(x), 0

<u>Polinômio Q(x) = 1, a partir de P(x) de grau 4</u>

a1=-6
a2=2
a3=8
a4=16
P(x)=(x-a1)*(x-a2)*(x-a3)*(x-a4)
P1(x)= (x-a2)*(x-a3)*(x-a4)
P2(x)= (x-a1)*(x-a3)*(x-a4)
P3(x)= (x-a1)*(x-a2)*(x-a4)
P4(x)= (x-a1)*(x-a2)*(x-a3)
derivadaP(x)=P1(x)+P2(x)+P3(x)+P4(x)
q1(x)=P1(x)/ derivadaP(a1)
q2(x)=P2(x)/ derivadaP(a2)
q3(x)=P3(x)/ derivadaP(a3)
q4(x)=P4(x)/ derivadaP(a4)
Q(x)=(q1(x)+q2(x)+q3(x)+q4(x))
plot P(x), derivadaP(x), Q(x), 0

Pela analogia do desenvolvimento que fiz para n = 2 , 3 e 4 pude definir Q(x) como:

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i(x)}{P'(a_i)} = 1$$

Portanto não é um polinômio do grau n-1, é um polinômio de grau zero. E não vale 1 em cada uma das raízes de P, o seu somatório é que dá 1.

(g) (Verdadeira)

Se um polinômio Q tiver grau n − 1 assumir n vezes o mesmo valor, então Q é constante.

Pelo que vimos no item (h) da questão anterior, se tivermos P(x) de grau n – 1, i valores de x, tal que i > n – 1, então teremos P(x) constante. Porém nesta questão temos que Q(x) = $\sum_{i=1}^{n} \frac{P_i(x)}{P'(a_i)} = 1$, que já sabemos da questão anterior que é constante e igual a 1. Portanto o item não é errado, só causa uma lembrança do que acontece com P(x), quando já sabemos que Q(x) = $\sum_{i=1}^{n} \frac{P_i(x)}{P'(a_i)} = 1$.

(h) (Verdadeiro)

Seja $(a_i)_{i=1,\dots n}$ uma sucessão estritamente crescente de números reais e

$$P(x) = (x-a_1)\cdot \dots \cdot (x-a_n) = \prod_{i=1}^{n} (x-a_i)$$

Com a Notação: $P_i(x) = \dfrac{P(x)}{x-a_i}$

Defina $Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{P_i(x)}{P'(a_i)}$ então Q é constante igual a 1.

Vamos definir Q(x):
Temos que:

$$P_1(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{n-1})(x-a_n)}{x-a_1} = (x-a_2)\dots(x-a_{n-1})(x-a_n)$$

$$P_2(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{n-1})(x-a_n)}{x-a_2} = (x-a_1)(x-a_3)\dots(x-a_n)$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$P_{n-1}(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{n-1})(x-a_n)}{x-a_{n-1}} = (x-a_1)\dots(x-a_{n-2})(x-a_n)$$

$$P_n(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{n-1})(x-a_n)}{x-a_n} = (x-a_1)\dots(x-a_{n-2})(x-a_{n-1})$$

E temos que:

$P'(a_1) = (a_1 - a_2)\dots(a_1 - a_{n-1}).(a_1 - a_n) = (-1)^{n-1}.(a_2 - a_1)\dots(a_{n-1} - a_1).(a_n - a_1)$

$P'(a_2) = (a_2 - a_1).(a_2 - a_3)\dots(a_2 - a_n) = (-1)^{n-2}.(a_2 - a_1).(a_3 - a_2)\dots(a_n - a_2)$

$\vdots$

$P'(a_{n-1}) = (a_{n-1} - a_1)\dots(a_{n-1} - a_{n-2}).(a_{n-1} - a_n) = (-1)^{1}.(a_{n-1} - a_1)\dots(a_{n-1} - a_{n-2}).(a_n - a_{n-1})$

$P'(a_n) = (-1)^{0}.(a_n - a_1).(a_n - a_2)\dots(a_n - a_{n-1})$

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i(x)}{P'(a_i)} = \frac{P_1(x)}{P'(a_1)} + \frac{P_2(x)}{P'(a_2)} + \dots + \frac{P_{n-1}(x)}{P'(a_{n-1})} + \frac{P_n(x)}{P'(a_n)}$$

$$= (-1)^{n-1} \frac{(x-a_2)\dots(x-a_{n-1})(x-a_n)}{(a_2-a_1)\dots(a_{n-1}-a_1)(a_n-a_1)} + (-1)^{n-2} \frac{(x-a_1)(x-a_3)\dots(x-a_n)}{(a_2-a_1)(a_3-a_2)\dots(a_n-a_2)} + \dots +$$

$$+ \dots + (-1) \frac{(x-a_1)\dots(x-a_{n-2})(x-a_n)}{(a_{n-1}-a_1)\dots(a_{n-1}-a_{n-2})(a_n-a_{n-1})} + \frac{(x-a_1)\dots(x-a_{n-2})(x-a_{n-1})}{(a_n-a_1)\dots(a_n-a_{n-2})(a_n-a_{n-1})}$$

Este somatório dá esperadamente 1, cheguei a essa conclusão depois de fazer os cálculos acima propostos para n = 2 , 3 e 4, não irei desenvolver a expressão acima em virtude dos cálculos serem extremamente grandes. Sento que poderia chegar a essa conclusão de outras formas.
Com a ajuda do gnuplot pude perceber que isso sempre acontece, veja os programas:

<u>Polinômio Q(x) = 1, a partir de P(x) de grau 2</u>

```
a1=-6
a2=2
P(x)=(x-a1)*(x-a2)
P1(x)= (x-a2)
P2(x)= (x-a1)
derivadaP(x)=P1(x)+P2(x)
q1(x)=P1(x)/ derivadaP(a1)
q2(x)=P2(x)/ derivadaP(a2)
Q(x)=(q1(x)+q2(x))
plot P(x), derivadaP(x), Q(x), 0
```

<u>Polinômio Q(x) = 1, a partir de P(x) de grau 3</u>

```
a1=-6
a2=2
a3=8
P(x)=(x-a1)*(x-a2)*(x-a3)
P1(x)= (x-a2)*(x-a3)
P2(x)= (x-a1)*(x-a3)
P3(x)= (x-a1)*(x-a2)
derivadaP(x)=P1(x)+P2(x)+P3(x)
q1(x)=P1(x)/ derivadaP(a1)
q2(x)=P2(x)/ derivadaP(a2)
q3(x)=P3(x)/ derivadaP(a3)
Q(x)=(q1(x)+q2(x)+q3(x))
plot P(x), derivadaP(x), Q(x), 0
```

<u>Polinômio Q(x) = 1, a partir de P(x) de grau 4</u>

```
a1=-6
a2=2
a3=8
a4=16
P(x)=(x-a1)*(x-a2)*(x-a3)*(x-a4)
P1(x)= (x-a2)*(x-a3)*(x-a4)
P2(x)= (x-a1)*(x-a3)*(x-a4)
P3(x)= (x-a1)*(x-a2)*(x-a4)
P4(x)= (x-a1)*(x-a2)*(x-a3)
derivadaP(x)=P1(x)+P2(x)+P3(x)+P4(x)
q1(x)=P1(x)/ derivadaP(a1)
q2(x)=P2(x)/ derivadaP(a2)
```

q3(x)=P3(x)/ derivadaP(a3)
q4(x)=P4(x)/ derivadaP(a4)
Q(x)=(q1(x)+q2(x)+q3(x)+q4(x))
plot P(x), derivadaP(x), Q(x), 0

Pela analogia do desenvolvimento que fiz para n = 2 , 3 e 4 pude definir Q(x) como:

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i(x)}{P'(a_i)} = 1$$

Portanto não é um polinômio do grau n-1, é um polinômio de grau zero. E não vale 1 em cada uma das raízes de P, o seu somatório é que dá 1.

(i) (Verdadeiro)

Polinômio de Lagrange

Seja $(a_i)_{i=1,\dots n}$ uma sucessão estritamente crescente de números reais e

$$P(x) = (x-a_1)\cdot\ldots\cdot(x-a_n) = \prod_{i=1}^{n}(x-a_i)$$

Considere a sucessão de números reais $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ e a função

$$h : \alpha \in \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \mapsto h(\alpha) \in \Re$$

Quer dizer que os números h(a_1), h(a_2), ... , h(a_n) são dados.

Defina Q(x) = $\sum_{i=1}^{n} \frac{h(a_i)P_\alpha(x)}{P'(a_i)}$ então Q(a_i) = h(a_i). Logo Q é um polinômio de grau n – 1 passa nos pontos

$$(a_1, h(a_1)), (a_2, h(a_2)), \ldots, (a_n, h(a_n))$$

Em outras palavras, Q é um polinômio de grau n – 1 interpolando os pontos

$$(a_1, h(a_1)), (a_2, h(a_2)), \ldots, (a_n, h(a_n))$$

Com a Notação: $P_i(x) = \frac{P(x)}{x-a_i}$

Vamos definir Q(x):
Temos que:

$$P_1(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1})(x-a_n)}{x-a_1} = (x-a_2)\ldots(x-a_{n-1})(x-a_n)$$

$$P_2(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1})(x-a_n)}{x-a_2} = (x-a_1)(x-a_3)\ldots(x-a_n)$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$P_{n-1}(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1})(x-a_n)}{x-a_{n-1}} = (x-a_1)\ldots(x-a_{n-2})(x-a_n)$$

$$P_n(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1})(x-a_n)}{x-a_n} = (x-a_1)\ldots(x-a_{n-2})(x-a_{n-1})$$

E temos que:
$P'(a_1) = (a_1 - a_2)\ldots(a_1 - a_{n-1}).(a_1 - a_n) = (-1)^{n-1}.(a_2 - a_1)\ldots(a_{n-1} - a_1).(a_n - a_1)$

$P'(a_2) = (a_2 - a_1).(a_2 - a_3)...(a_2 - a_n) = (-1)^{n-2}.(a_2 - a_1).(a_3 - a_2)...(a_n - a_2)$

$\vdots$

$P'(a_{n-1}) = (a_{n-1} - a_1)...(a_{n-1} - a_{n-2}).(a_{n-1} - a_n) = (-1)^1.(a_{n-1} - a_1)...(a_{n-1} - a_{n-2}).(a_n - a_{n-1})$

$P'(a_n) = (-1)^0.(a_n - a_1).(a_n - a_2)...(a_n - a_{n-1})$

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{h(a_i)P_\alpha(x)}{P'(a_i)} = \frac{h(a_1).P_1(x)}{P'(a_1)} + \frac{h(a_2).P_2(x)}{P'(a_2)} + ... + \frac{h(a_{n-1}).P_{n-1}(x)}{P'(a_{n-1})} + \frac{h(a_n).P_n(x)}{P'(a_n)}$$

$$= (-1)^{n-1}\frac{h(a_1).(x-a_2)...(x-a_{n-1})(x-a_n)}{(a_2-a_1)...(a_{n-1}-a_1)(a_n-a_1)} + (-1)^{n-2}\frac{h(a_2).(x-a_1)(x-a_3)...(x-a_n)}{(a_2-a_1)(a_3-a_2)...(a_n-a_2)} + ... +$$

$$+ ... + (-1)\frac{h(a_{n-1}).(x-a_1)...(x-a_{n-2})(x-a_n)}{(a_{n-1}-a_1)...(a_{n-1}-a_{n-2})(a_n-a_{n-1})} + \frac{h(a_n).(x-a_1)...(x-a_{n-2})(x-a_{n-1})}{(a_n-a_1)...(a_n-a_{n-2})(a_n-a_{n-1})}$$

Analogamente ao item (i) da questão anterior não temos perspectivas de simplificação nos coeficientes de Q(x) que muito provavelmente serão diferentes de zero e, portanto Q(x) é um polinômio de grau n – 1.

E como

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{h(a_i)P_\alpha(x)}{P'(a_i)} = h(a_1)\frac{.P_1(x)}{P'(a_1)} + h(a_2)\frac{P_2(x)}{P'(a_2)} + ... + h(a_{n-1})\frac{P_{n-1}(x)}{P'(a_{n-1})} + h(a_n)\frac{P_n(x)}{P'(a_n)}$$

Podemos ver que $Q(a_1) = h(a_1)$, $Q(a_2) = h(a_2)$, ... , $Q(a_n) = h(a_n)$ e, portanto passa nos pontos:

$$(a_1, h(a_1)), (a_2, h(a_2)), ... , (a_n, h(a_n))$$

Logo Q(x) é um polinômio do grau n – 1 interpolando os pontos acima.