**UEVA - UNIVERSIDADE ESTADUAL VALE DO ACARAÚ**
**DISCIPLINA DE CÁLCULO NUMÉRICO COMPUTACIONAL**
**Prof. Tarcísio Praciano Pereira.**
**Aluno: Francisco José Calixto de Sousa - 5° Período do Curso de Matemática**

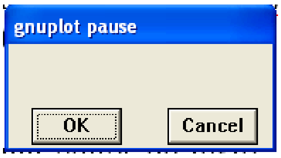
## RESOLUÇÃO DA LISTA 02

1) (a) (Verdadeiro) A equação (1) diz o seguinte: $y = f(x), b = f(a), m = f'(a)$. Então a equação (1) é de uma reta que passa no ponto (a, b) com coeficiente angular f′(a).
(b) (Falso)
(c) (Verdadeiro) Se a função *f* for derivável em *a* é sinal que naquele ponto existe uma reta com coeficiente anular $f'(a)$, tangente à curva.
(d) (Verdadeiro) Se $P(x) = b + m(x-a)$, onde $b = f(a)$ e $m = f'(a)$, então temos um polinômio que tem gráfico tangente à função *f*.
(e) (Falso).
(f) (Verdadeiro) A partir do polinômio $P(x) = a_0 + a_1(x-a)$ temos as seguintes deduções: $P(a) = a_0 + a_1(a-a) = a_0$ e $P'(x) = a_1$ e impondo ao sistema $\begin{cases} P(a) = f(a) = a_0 \\ P'(a) = f'(a) = a_1 \end{cases}$, temos a equação do Polinômio do primeiro grau que é tangente ao gráfico de $f(x)$.

2) (a) (Falso).
(b) (Verdadeiro) O terminal informa que a variável *a* não foi definida, como realmente não foi.
(c) (Verdadeiro) Se eu digitar o texto abaixo num editor de texto, copiar e colar no gnuplot, eu vou obter apenas o gráfico que faz referência a *a* = 2.
(Falso) Porém se eu digitar o texto abaixo linha após linha, diretamente no gnuplot, vou poder visualizar um gráfico referente a cada *a*, um após o outro.

```
f(x) = x**2
df(x) = 2*x
a = -3
g(x) = f(a) + df(a)*(x-a)
plot f(x), g(x) , 0
a = -2
plot f(x), g(x) , 0
a = 2
plot f(x), g(x) , 0
```

(d) (Verdadeiro) Se eu digitar o texto abaixo num editor de texto, copiar e colar no gnuplot, eu vou obter uma seqüência de gráficos, cada um referente ao seu respectivo *a*, cada vez que aciono o *enter*.
(Falso) Porém se eu digitar o texto abaixo linha após linha, diretamente no gnuplot, vou poder visualizar um gráfico referente a cada *a*, após o *enter* do texto " *plot f(x), g(x), 0* ", e além do mais para cada o *enter* do texto " *pause -2* ", aparecerá a janela abaixo:




Que no gnuplot significa que o usuário deve pressionar *enter* ou OK para continuar a seqüência de comandos. E como os comandos ainda serão digitados o comando " *pause -2* " se faz desnecessário. (Obs.: No comando " *pause -2* " não necessariamente temos que usar -2, poderíamos usar qualquer número negativo)

```
f(x) = x**2
df(x) = 2*x
a = -3
g(x) = f(a) + df(a)*(x-a)
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -2
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 2
plot f(x), g(x) , 0
```

3) (a) (Verdadeiro) Vejamos o Polinômio $P(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2$, se derivarmos uma e outra vez, teremos $P'(x) = a_1 + 2a_2(x-a)$ e $P''(x) = 2a_2$ . O que vai satisfazer $P(a), P'(a), P''(a)$ veja:

$$P(a) = a_0 + a_1(a-a) + a_2(a-a)^2 = a_0 \rightarrow P(a) = a_0,$$

$$P'(a) = a_1 + 2a_2(a-a) = a_1 \rightarrow P'(a) = a_1 \text{ e } P''(a) = 2a_2.$$

Logo o item (a) é verdadeiro.

(b) (Falso) $P''(a) = 2a_2$ é constante.

(c) (Falso) Não sabemos de $b = a_0$ na questão.

(d) (Verdadeiro) Como uma parábola tem coeficiente angular em cada ponto, então na parábola expressão P(x), então existirá $P'(a)$, o coeficiente angular instantâneo da parábola no ponto $x = a$ . O polinômio P(x) é do segundo grau e passa pelo ponto $(a, a_0)$ , pois $P(a) = a_0 + a_1(a-a) + a_2(a-a)^2 = a_0 \rightarrow P(a) = a_0$ , e possui coeficiente angular $a_1$ , $P'(a) = a_1 + 2a_2(a-a) = a_1 \rightarrow P'(a) = a_1$ , logo o item (d) é verdadeiro.

(e) (Falso) Além de não sabermos se $b = a_0$, e *f* teria que ser derivável no ponto $x = a$ .

(f) (Verdadeiro) Considerando verdadeiro que a equação (11) é a equação de uma parábola que passa no ponto $(a, a_0)$ com coeficiente angular $a_1$, devemos provar a ida e a volta:

$\Rightarrow$ Vamos supor que a função $f$ é duas vezes derivável continuamente, então existirá $f(x), f'(x), f''(x)$, suponhamos também que os gráficos de *f* e de *P* sejam tangentes no ponto de abscissa *a*, ou seja, neste ponto haverá uma reta tangente a ambas as curvas de coeficiente angular $m = f'(a) = P'(a) = a_1$, no ponto de abscissa *a*, $f(a) = P(a) = a_0$.

$\Leftarrow$ Suponhamos agora que $a_0 = f(a)$ e $a_1 = f'(a)$. Como $a_0$ é a ordenada relativa à abscissa *a* do polinômio P(x) e da função *f*, ou seja, $P(a) = a_0 = f(a)$ e $P'(a) = a_1 = f'(a)$, então podemos concluir que P e f serão tangentes a uma reta de coeficiente angular $P'(a)$ no ponto $(a, P(a))$.

Se, também, $2a_2 = f''(a)$ então poderemos concluir que ambas as curvas terão a mesma curvatura, uma vez que possuem o mesmo sinal.

(g) (Verdadeiro) O item sugere: $P(a) = a_0 = f(a)$, $P'(a) = a_1 = f'(a)$, $P''(a) = 2a_2 = f''(a)$, o que assegura a mesma ordenada com *x* = *a*, a mesma derivada (coeficiente angular) com *x* = *a* e a mesma segunda derivada (concavidade da curva) com *x* = *a*. Logo o item (g) é verdadeiro.

(h) (Falso) $P''(a) \neq \dfrac{a_2}{2}$.

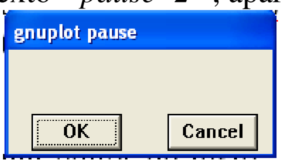
(i) (Falso) $f''(a) = 2a_2 \rightarrow a_2 = \dfrac{f''(a)}{2}$.

(j) (Verdadeiro) É a melhor porque substitui os coeficientes $a_0, a_1$ e $a_2$, por $f(a)$, $f'(a)$ e $\dfrac{f''(a)}{2}$, fazendo o gráfico de *P(x)* variar tangentemente a *f(x)*, dependendo do valor de *a*. Além do que a expressão $(x-a)$ sempre se anula quando $x = a$, restando apenas aquilo que não depende de $(x-a)$ no cálculo de $f^{(i)}(x)$, onde i depende da variabilidade de *f*.

4) (a) (Falso).
(b) (Verdadeiro) O terminal informa que a variável *a* não foi definida, como realmente não foi.
(c) (Verdadeiro) Se eu digitar o texto abaixo num editor de texto, copiar e colar no gnuplot, eu vou obter apenas o gráfico que faz referência à *a* = 2.
(Falso) Porém se eu digitar o texto abaixo linha após linha, diretamente no gnuplot, vou poder visualizar um gráfico referente à cada *a*, um após o outro.

```
f(x)=x**3
df(x)=3*x**2
ddf(x)=6*x
P(x) = f(a) + df(a)*(x-a) + 0.5*ddf(a)*(x-a)**2
a = -3
plot f(x), P(x) , 0
a = -2
plot f(x), P(x) , 0
a = 2
plot f(x), P(x) , 0
```

(d) (Verdadeiro) Se eu digitar o texto abaixo num editor de texto, copiar e colar no gnuplot, eu vou obter uma seqüência de gráficos, cada um referente ao seu respectivo *a*, cada vez que aciono o *enter*.
(Falso) Porém se eu digitar o texto abaixo linha após linha, diretamente no gnuplot, vou poder visualizar um gráfico referente a cada *a*, após o *enter* do texto “ *plot f(x), P(x), 0* ”, e além do mais para cada o *enter* do texto “ *pause -2* ”, aparecerá a janela abaixo:




Que no gnuplot significa que o usuário deve pressionar *enter* ou OK para continuar a seqüência de comandos. E como os comandos ainda serão digitados o comando “ *pause -2* ” se faz desnecessário. (Obs.: No comando “ *pause -2* ” não necessariamente temos que usar -2, poderíamos usar qualquer número negativo)

```
f(x)=x**3
df(x)=3*x**2
ddf(x)=6*x
P(x) = f(a) + df(a)*(x-a) + 0.5*ddf(a)*(x-a)**2
a = -3
plot f(x), P(x) , 0
pause -2
a = -2
plot f(x), P(x) , 0
pause -2
a = 2
plot f(x), P(x) , 0
```

(e) (Verdadeiro) Pois a partir da órbita da estação que supostamente segue uma função, poderíamos fazer com que o módulo, que também seguiria uma curva predefinida, tangencie a órbita da estação internacional fazendo assim a acoplagem desejada.

5) Vejamos exemplos (a grande extensão de valores atribuídos à *a* se faz necessária para que possamos assistir melhor!) de alguns vídeos que devem ser rodados no Gnuplot, copie o texto a baixo e cole no Gnuplot, em seguida segure o *enter* para a melhor observação do vídeo (você também tem a opção copiar desde *Início de exemplo 01* até *Fim do exemplo 05* que terá a visualização de todos os vídeos, um seguido do outro!):

Início do exemplo 01.

```
set xrange [-10: 10]
set yrange [-10: 10]
f(x)=sin (x)
df(x)= cos (x)
ddf(x)= - sin (x)
dddf(x)= - cos (x)
g(x)=f(a)+df(a)*(x-a)+(1/2.0)*ddf(a)*(x-a)**2 +(1/6.0)*dddf(a)*(x-a)**3
a = -10
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -9.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -9
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -8.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -8
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -7.5
plot f(x), g(x) , 0
```

```
pause -2
a = -7
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -6.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -6
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -5.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -4.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -4
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -3.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -3
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -2.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -2
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -1.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -1
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -0.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 0
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 0.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 1
```

```
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 1.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 2
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 2.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 3
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 3.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 4
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 4.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 5.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 6
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 6.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 7
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 7.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 8
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 8.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 9
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
```

```
a = 9.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 10
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
```

Fim do exemplo 01.

-------------------------------

Início do exemplo 02.

```
f(x)=(x-5)*(x+3)*(x+5)
df(x)= (x-5)*(x+3) + (x-5)*(x+5) + (x+3)*(x+5)
ddf(x)= (x-5)+(x+3) + (x-5)+(x+5) + (x+3)+(x+5)
dddf(x)=6
g(x)=f(a)+df(a)*(x-a)+(1/2.0)*ddf(a)*(x-a)**2
a = -10
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -9.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -9
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -8.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -8
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -7.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -7
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -6.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -6
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -5.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -4.5
```

```
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -4
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -3.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -3
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -2.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -2
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -1.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -1
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -0.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 0
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 0.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 1
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 1.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 2
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 2.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 3
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 3.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
```

```
a = 4
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 4.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 5.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 6
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 6.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 7
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 7.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 8
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 8.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 9
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 9.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 10
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
```

Fim do exemplo 02.
------------------------------
Início do exemplo 03.

```
set xrange [-10: 10]
set yrange [-10: 10]
f(x)=sin (x)
df(x)= cos (x)
ddf(x)= - sin (x)
dddf(x)= - cos (x)
```

```
ddddf(x)= sin (x)
g(x)=f(a)+df(a)*(x-a)+(1/2.0)*ddf(a)*(x-a)**2 +(1/6.0)*dddf(a)*(x-a)**3
h(x)=df(a)+ddf(a)*(x-a)+(1/2.0)*dddf(a)*(x-a)**2 +(1/6.0)*ddddf(a)*(x-a)**3
a = -10
plot f(x), df(x), g(x), h(x) , 0
pause -2
a = -9.5
plot f(x), df(x), g(x), h(x) , 0
pause -2
a = -9
plot f(x), df(x), g(x), h(x) , 0
pause -2
a = -8.5
plot f(x), df(x), g(x), h(x) , 0
pause -2
a = -8
plot f(x), df(x), g(x), h(x) , 0
pause -2
a = -7.5
plot f(x), df(x), g(x), h(x) , 0
pause -2
a = -7
plot f(x), df(x), g(x), h(x) , 0
pause -2
a = -6.5
plot f(x), df(x), g(x), h(x) , 0
pause -2
a = -6
plot f(x), df(x), g(x), h(x) , 0
pause -2
a = -5.5
plot f(x), df(x), g(x), h(x) , 0
pause -2
a = -5
plot f(x), df(x), g(x), h(x) , 0
pause -2
a = -4.5
plot f(x), df(x), g(x), h(x) , 0
pause -2
a = -4
plot f(x), df(x), g(x), h(x) , 0
pause -2
a = -3.5
plot f(x), df(x), g(x), h(x) , 0
pause -2
a = -3
plot f(x), df(x), g(x), h(x) , 0
pause -2
a = -2.5
plot f(x), df(x), g(x), h(x) , 0
```

```
pause -2
a = -2
plot f(x), df(x), g(x), h(x) , 0
pause -2
a = -1.5
plot f(x), df(x), g(x), h(x) , 0
pause -2
a = -1
plot f(x), df(x), g(x), h(x) , 0
pause -2
a = -0.5
plot f(x), df(x), g(x), h(x) , 0
pause -2
a = 0
plot f(x), df(x), g(x), h(x) , 0
pause -2
a = 0.5
plot f(x), df(x), g(x), h(x) , 0
pause -2
a = 1
plot f(x), df(x), g(x), h(x) , 0
pause -2
a = 1.5
plot f(x), df(x), g(x), h(x) , 0
pause -2
a = 2
plot f(x), df(x), g(x), h(x) , 0
pause -2
a = 2.5
plot f(x), df(x), g(x), h(x) , 0
pause -2
a = 3
plot f(x), df(x), g(x), h(x) , 0
pause -2
a = 3.5
plot f(x), df(x), g(x), h(x) , 0
pause -2
a = 4
plot f(x), df(x), g(x), h(x) , 0
pause -2
a = 4.5
plot f(x), df(x), g(x), h(x) , 0
pause -2
a = 5
plot f(x), df(x), g(x), h(x) , 0
pause -2
a = 5.5
plot f(x), df(x), g(x), h(x) , 0
pause -2
a = 6
```

```
plot f(x), df(x), g(x), h(x) , 0
pause -2
a = 6.5
plot f(x), df(x), g(x), h(x) , 0
pause -2
a = 7
plot f(x), df(x), g(x), h(x) , 0
pause -2
a = 7.5
plot f(x), df(x), g(x), h(x) , 0
pause -2
a = 8
plot f(x), df(x), g(x), h(x) , 0
pause -2
a = 8.5
plot f(x), df(x), g(x), h(x) , 0
pause -2
a = 9
plot f(x), df(x), g(x), h(x) , 0
pause -2
a = 9.5
plot f(x), df(x), g(x), h(x) , 0
pause -2
a = 10
plot f(x), df(x), g(x), h(x) , 0
pause -2
```

Fim do exemplo 03.

---------------------------

Início do exemplo 04.

```
set xrange [-10: 10]
set yrange [-5: 5]
f(x)= sin(2*x) + cos (3*x)
df(x)= 2*cos(2*x) – 3*sin (3*x)
ddf(x)= -4*sin(2*x) – 9*cos (3*x)
dddf(x)= -8*cos(2*x) + 27*sin (3*x)
g(x)=f(a)+df(a)*(x-a)+(1/2.0)*ddf(a)*(x-a)**2 +(1/6.0)*dddf(a)*(x-a)**3
a = -10
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -9.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -9
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -8.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
```

```
a = -8
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -7.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -7
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -6.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -6
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -5.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -4.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -4
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -3.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -3
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -2.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -2
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -1.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -1
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -0.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 0
plot f(x), g(x) , 0
```

```
pause -2
a = 0.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 1
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 1.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 2
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 2.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 3
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 3.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 4
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 4.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 5.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 6
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 6.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 7
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 7.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 8
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 8.5
```

```
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 9
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 9.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 10
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
```

Fim do exemplo 04.
---------------------------
Início do exemplo 05.

```
set xrange [-10: 10]
set yrange [-2000: 2000]
f(x)=x**4+14*x**3+8*x**2-350*x-825
df(x)= 4*x**3+42*x**2+16*x-350
ddf(x)= 12*x**2+84*x+16
dddf(x)=24*x+84
g(x)=f(a)+df(a)*(x-a)+(1/2.0)*ddf(a)*(x-a)**2 +(1/6.0)*dddf(a)*(x-a)**3
a = -10
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -9.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -9
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -8.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -8
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -7.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -7
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -6.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -6
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
```

```
a = -5.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -4.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -4
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -3.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -3
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -2.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -2
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -1.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -1
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = -0.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 0
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 0.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 1
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 1.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 2
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 2.5
plot f(x), g(x) , 0
```

```
pause -2
a = 3
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 3.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 4
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 4.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 5.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 6
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 6.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 7
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 7.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 8
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 8.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 9
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 9.5
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
a = 10
plot f(x), g(x) , 0
pause -2
```

Fim do exemplo 05.

6) (a) (Falso).

(b) (Verdadeiro) A partir deste item é dito que *f* é suficientemente derivável e vamos também considerar $P(a) = f(a)$ , $P'(a) = f'(a)$ , $P''(a) = f''(a)$ e $P'''(a) = f'''(a)$ . Vejamos o Polinômio $P(x) = A + B(x-a) + C(x-a)^2 + D(x-a)^3$ , se derivarmos três vezes, teremos $P'(x) = B + 2C(x-a) + 3D(x-a)^2$ , $P''(x) = 2C + 6D(x-a)$ e $P'''(x) = 6D$ . O que vai satisfazer $P(a), P'(a), P''(a), P'''(a)$ veja:

$$P(a) = A + B(a-a) + C(a-a)^2 + D(a-a)^3 \to P(a) = A,$$

$$P'(a) = B + 2C(a-a) + 3D(a-a)^2 \to P'(a) = B,$$

$$P''(a) = 2C + 6D(a-a) \to P''(a) = 2C \quad P'''(a) = 6D$$

Assim:

$A = P(a) = f(a)$, $B = P'(a) = f'(a)$, $2C = P''(a) = f''(a)$ e $6D = P'''(a) = f'''(a)$

(c) (Falso) $f'''(a) = 6D \to D = \dfrac{f''(a)}{6}$.

(d) (Verdadeiro) É a melhor porque substitui os coeficientes A, B, C e D, por $f(a), f'(a), \dfrac{f''(a)}{2}$ e $\dfrac{f'''(a)}{6}$ , fazendo o gráfico de *P*(*x*) variar tangentemente a *f*(*x*), dependendo do valor de *a*. Além do que a expressão $(x-a)$ sempre se anula quando $x = a$, restando apenas aquilo que não depende de $(x-a)$ no cálculo de $f^{(i)}(x)$, onde i depende da variabilidade de *f*.

7) (a) (Verdadeiro) Veja a justificativa abaixo.
(b) (Falso).
A fórmula de Taylor de grau 7 é:

$$P(x) = A + B(x-a) + C(x-a)^2 + D(x-a)^3 + E(x-a)^4 + F(x-a)^5 + G(x-a)^6 + H(x-a)^7$$

$f(x) = \sin(x)$ . Como f(x) é infinitamente derivável, vamos supor agora que todas as sentenças abaixo sejam verdadeiras:

$$f(a) = A = P(a)$$
$$f^{(1)}(a) = B = P^{(1)}(a)$$
$$f^{(2)}(a) = 2C = P^{(2)}(a)$$
$$f^{(3)}(a) = 6D = P^{(3)}(a)$$
$$f^{(4)}(a) = 24E = P^{(4)}(a)$$
$$f^{(5)}(a) = 120F = P^{(5)}(a)$$
$$f^{(6)}(a) = 720G = P^{(6)}(a)$$
$$f^{(7)}(a) = 5040H = P^{(7)}(a)$$

Então vamos substituir cada coeficiente A, B, C, … , H, por sua respectiva derivada $f^{(i)}(a)$, onde i depende da ordem da derivada.

$$P(x) = f(a) + f^{(1)}(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{6}(x-a)^3 + \frac{f^{(4)}(a)}{24}(x-a)^4 +$$

$$+ \frac{f^{(5)}(a)}{120}(x-a)^5 + \frac{f^{(6)}(a)}{720}(x-a)^6 + \frac{f^{(7)}(a)}{5040}(x-a)^7$$

Como podemos calcular cada derivada abaixo com $a$ = 0, temos:

$$f(x)=\sin(x) \rightarrow f(0)=\sin(0)=0$$
$$f^{(1)}(x)=\cos(x) \rightarrow f^{(1)}(0)=\cos(0)=1$$
$$f^{(2)}(x)=(-1)*\sin(x) \rightarrow f^{(2)}(0)=(-1)*\sin(0)=0$$
$$f^{(3)}(x)=(-1)*\cos(x) \rightarrow f^{(3)}(0)=(-1)*\cos(0)=-1$$
$$f^{(4)}(x)=\sin(x) \rightarrow f^{(4)}(0)=\sin(0)=0$$
$$f^{(5)}(x)=\cos(x) \rightarrow f^{(5)}(0)=\cos(0)=1$$
$$f^{(6)}(x)=(-1)*\sin(x) \rightarrow f^{(6)}(0)=(-1)*\sin(0)=0$$
$$f^{(7)}(x)=(-1)*\cos(x) \rightarrow f^{(7)}(0)=(-1)*\cos(0)=-1$$

$$P(x)=f(0)+f^{(1)}(0)(x-0)+\frac{f^{(2)}(0)}{2}(x-0)^2+\frac{f^{(3)}(0)}{6}(x-0)^3+\frac{f^{(4)}(0)}{24}(x-0)^4+$$
$$+\frac{f^{(5)}(0)}{120}(x-0)^5+\frac{f^{(6)}(0)}{720}(x-0)^6+\frac{f^{(7)}(0)}{5040}(x-0)^7$$
$$\Leftrightarrow \ P(x)=0+1.x+\frac{0}{2!}.x^2+\frac{(-1)}{3!}x^3+\frac{0}{4!}.x^4+\frac{1}{5!}.x^5+\frac{0}{6!}.x^6+\frac{(-1)}{7!}.x^7$$
$$\Leftrightarrow \ P(x)=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}.x^5-\frac{1}{7!}.x^7$$

O que prova que apenas o item (a) é verdadeiro!

(c) (Verdadeiro) Veja a justificativa abaixo.

(d) (Falso).

A fórmula de Taylor de grau 8 é:

$$Q(x)=A+B(x-a)+C(x-a)^2+D(x-a)^3+E(x-a)^4+F(x-a)^5+G(x-a)^6+H(x-a)^7+I(x-a)^8$$

$g(x)=\cos(x)$. Como g(x) é infinitamente derivável, vamos supor agora que todas as sentenças abaixo sejam verdadeiras:

$$g(a)=A=P(a)$$
$$g^{(1)}(a)=B=P^{(1)}(a)$$
$$g^{(2)}(a)=2C=P^{(2)}(a)$$
$$g^{(3)}(a)=6D=P^{(3)}(a)$$
$$g^{(4)}(a)=24E=P^{(4)}(a)$$
$$g^{(5)}(a)=120F=P^{(5)}(a)$$
$$g^{(6)}(a)=720G=P^{(6)}(a)$$
$$g^{(7)}(a)=5040H=P^{(7)}(a)$$
$$g^{(8)}(a)=40320I=P^{(8)}(a)$$

Então vamos substituir cada coeficiente *A, B, C, … , I*, por sua respectiva derivada $g^{(i)}(a)$, onde i depende da ordem da derivada.

$$Q(x)=g(a)+g^{(1)}(a)(x-a)+\frac{g^{(2)}(a)}{2}(x-a)^2+\frac{g^{(3)}(a)}{6}(x-a)^3+\frac{g^{(4)}(a)}{24}(x-a)^4+$$
$$+\frac{g^{(5)}(a)}{120}(x-a)^5+\frac{g^{(6)}(a)}{720}(x-a)^6+\frac{g^{(7)}(a)}{5040}(x-a)^7+\frac{g^{(8)}(a)}{40320}(x-a)^8$$

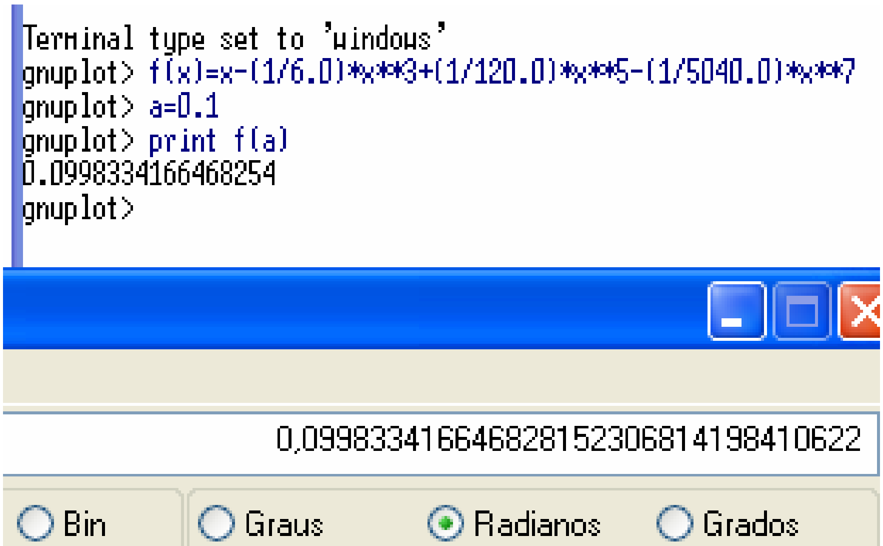
Como podemos calcular cada derivada abaixo com $a$ = 0, temos:

$$g(x) = \cos(x) \to g(0) = \cos(0) = 1$$
$$g^{(1)}(x) = (-1) * \sin(x) \to g^{(1)}(0) = (-1) * \sin(0) = 0$$
$$g^{(2)}(x) = (-1) * \cos(x) \to g^{(2)}(0) = (-1) * \cos(0) = -1$$
$$g^{(3)}(x) = \sin(x) \to g^{(3)}(0) = \sin(0) = 0$$
$$g^{(4)}(x) = \cos(x) \to g^{(4)}(0) = \cos(0) = 1$$
$$g^{(5)}(x) = (-1) * \sin(x) \to g^{(5)}(0) = (-1) * \sin(0) = 0$$
$$g^{(6)}(x) = (-1) * \cos(x) \to g^{(6)}(0) = (-1) * \cos(0) = -1$$
$$g^{(7)}(x) = \sin(x) \to g^{(7)}(0) = \sin(0) = 0$$
$$g^{(8)}(x) = \cos(x) \to g^{(8)}(0) = \cos(0) = 1$$

$$Q(x) = g(0) + g^{(1)}(0)(x-0) + \frac{g^{(2)}(0)}{2}(x-0)^2 + \frac{g^{(3)}(0)}{6}(x-0)^3 + \frac{g^{(4)}(0)}{24}(x-0)^4 +$$
$$+ \frac{g^{(5)}(0)}{120}(x-0)^5 + \frac{g^{(6)}(0)}{720}(x-0)^6 + \frac{g^{(7)}(0)}{5040}(x-0)^7 + \frac{g^{(7)}(0)}{40320}(x-0)^7$$
$$\Leftrightarrow \; Q(x) = 1 + 0.x + \frac{(-1)}{2!}.x^2 + \frac{0}{3!}.x^3 + \frac{1}{4!}.x^4 + \frac{0}{5!}.x^5 + \frac{(-1)}{6!}.x^6 + \frac{0}{7!}.x^7 + \frac{1}{8!}.x^8$$
$$\Leftrightarrow \; Q(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}.x^4 - \frac{1}{6!}.x^6 + \frac{1}{8!}.x^8$$

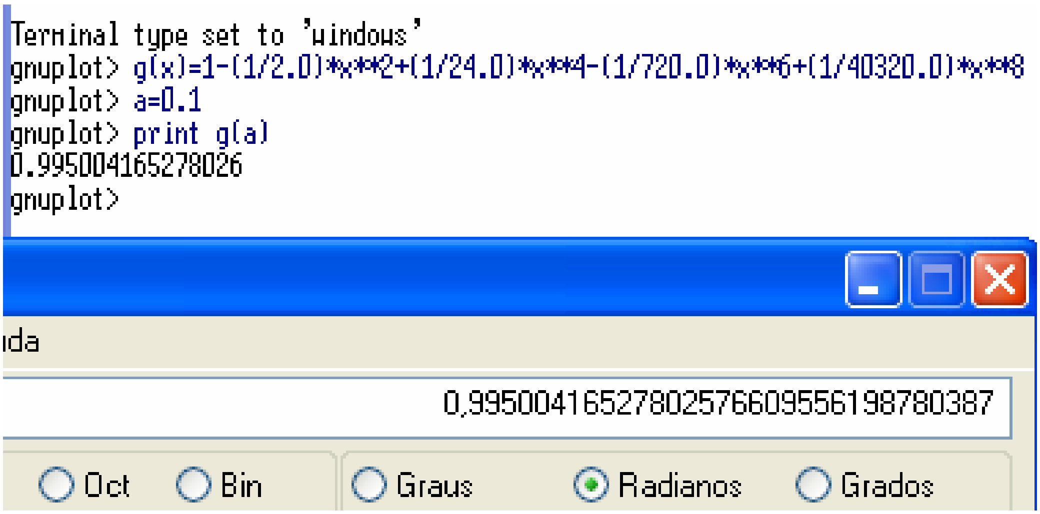
O que prova que apenas o item (c) é verdadeiro!

8) (a) Veja os diferentes resultados, utilizando uma calculadora científica, que executa o polinômio de Taylor, até uma ordem superior a 7, ou seja produz um resultado mais preciso do que seria sin (0,1) e o Gnuplot que calcula o polinômio de Taylor na ordem 7. Veja os resultados:




Repare que embora sejam valores quase iguais, diferem nas últimas casas decimais.

(b) Veja os diferentes resultados, utilizando uma calculadora científica, que executa o polinômio de Taylor, até uma ordem superior a 8, ou seja produz um resultado mais preciso do que seria cos (0,1) e o Gnuplot que calcula o polinômio de Taylor na ordem 8. Veja os resultados:




Repare que embora sejam valores quase iguais, diferem nas últimas casas decimais.

9) (a) (Falso).

(b) (Verdadeiro) Se $P(x)$, fosse de grau 9, ele seria assim:

$$P(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}.x^5 - \frac{1}{7!}.x^7 + \frac{1}{9!}.x^9 \text{ e sua derivada seria:}$$

$$P'(x) = 1 - 3.\frac{1}{3.2!}x^{3-1} + 5.\frac{1}{5.4!}.x^{5-1} - 7.\frac{1}{7.6!}.x^{7-1} + 9.\frac{1}{9.8!}.x^{9-1} \Rightarrow$$

$$P'(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}.x^4 - \frac{1}{6!}.x^6 + \frac{1}{8!}.x^8 = Q(x)$$

(c) (Verdadeiro) A derivada de $Q(x)$ é:

$$Q'(x) = -2.\frac{1}{2.1!}x^{2-1} + 4.\frac{1}{4.3!}.x^{4-1} - 6.\frac{1}{6.5!}.x^{6-1} + 8\frac{1}{8.7!}.x^{8-1}$$

$$Q'(x) = -x + \frac{1}{3!}x^3 - \frac{1}{5!}.x^5 + \frac{1}{7!}.x^7 = -P(x)$$

(d) (Verdadeiro) Como $i$ é constante, temos:

$$F(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}.x^5 - \frac{1}{7!}.x^7 + i.\left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}.x^4 - \frac{1}{6!}.x^6 + \frac{1}{8!}.x^8\right)$$

$$F'(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}.x^4 - \frac{1}{6!}.x^6 - i.\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}.x^5 - \frac{1}{7!}.x^7\right).$$

(e) (Falso) Pois a afirmativa do item (a) é falsa.

(f) (Verdadeiro) $F'(x) = i.[(-i).Q'(x) + P'(x)] = -(i^2).Q'(x) + i.P'(x) = -(-1).Q'(x) + i.P'(x)$
$= Q'(x) + i.P'(x) = -P(x) + i.Q(x) = i^2.P(x) + i.Q(x) = i.[Q(x) + i.P(x)] = i.F(x)$.

(g) (Falso) Como o próprio item (f) argumenta, é necessária uma condição, que grau P(x) = grau Q(x) + 1, ou seja a afirmação não é correta, pois P(x) apenas se aproxima de f(x) = sin (x) e Q(x) apenas se aproxima de g(x) = cos (x).

(h) (Verdadeiro) Ao contrário do item anterior, vamos considerar agora P(x) e Q(x), não como aproximações de sin (x) e cos (x), respectivamente, onde P(x) e Q(x) seriam apenas os desenvolvimentos dos polinômios de Taylor até certa ordem $n$. Agora vamos considerar este $n \to \infty$, ou seja P(x) = f(x) = sin (x) e Q(x) = g(x) = cos (x), portanto será válido $F'(x) = F(x)$, o que denota verdadeira a fórmula de Euler.

10. (a) (Verdadeira) Por analogia, o plano que passa tangente à **curva f(x, y), derivável para x e para y, pelo ponto (a, b, c),** terá como equação do plano $(z - c) = A.(x - a) + B.(y - b)$, onde $A = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $B = \dfrac{\partial f}{\partial y}$, as derivadas parciais de $f$ em relação a $x$ e a $y$, respectivamente.

    Daí, teremos a equação do plano que passa por (a, b, c) com coeficientes angulares parciais $A$ e $B$:
    $z = A.(x - a) + B.(y - b) + c.$

    (b) (Verdadeira) Vejamos as equações da página 2 da lista de exercícios 2, e veremos que $A = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ por que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ acompanha $(x - a)$, que após a diferenciação explícita em relação a x, veremos $(x - a) \to dx.$

    (c) (Verdadeira) Vejamos as equações da página 2 da lista de exercícios 2, e veremos que $B = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ por que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ acompanha $(y - b)$, que após a diferenciação explícita em relação a y, veremos $(y - b) \to dy.$

    (d) (Verdadeira) Como $g(x, y)$ tem derivadas parciais que são $A = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $B = \dfrac{\partial f}{\partial y}$, então a equação do plano tangente à $g(x, y)$ no ponto (a, b, c) seria:

    $$f(x, y) = c + \frac{\partial g}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial g}{\partial y}(y - b)$$

    (e) (Verdadeira) Considerando que $c = g(a,b)$, partindo que $z = g(x, y)$, então a equação do plano tangente à $g(x, y)$ no ponto (a, b, $g(a,b)$) seria:

    $$f(x, y) = g(a,b) + \frac{\partial g}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial g}{\partial y}(y - b)$$

    (f) (Verdadeira) Como as derivadas parciais de f (x, y) e g (x, y) são iguais, isto faz com que os coeficientes angulares do plano tangente a $f$ e a $g$ sejam iguais, A e B para ambas as funções deriváveis. Com isso, já que z = f(x, y) = g(x, y), então c pertence aos dois planos. Logo, (a, b, c) pertence aos dois planos que, tendo coeficientes angulares iguais, são paralelos.

    (g) (Verdadeira) Se z = g(x, y), então g(x, y) – z = 0 teremos como derivadas parciais $\dfrac{\partial g}{\partial x}$, $\dfrac{\partial g}{\partial y}$, $\dfrac{\partial g}{\partial z}$, respectivamente, A, B, -1. Como sabemos que o vetor $\left(\dfrac{\partial g}{\partial x}, \dfrac{\partial g}{\partial y}, \dfrac{\partial g}{\partial z}\right)$ é o vetor gradiente, perpendicular à superfície de g no ponto (a, b, g(a, b)), então o vetor (A, B, -1) é o gradiente em questão.

    (i) (Verdadeira) Da mesma maneira que podemos achar a equação da reta tangente a uma função univariada, (apenas com uma variável, h(x), por exemplo), derivável, em (a, h(a)) poderemos então, seguindo o mesmo raciocínio, partir de uma função H multivariada, (com mais de uma variável, H(x, y), por exemplo duas), possuindo esta função H derivadas parciais nas vizinhanças de determinado ponto $(a, b, H(a, b))$ encontrar a equação do plano tangente a uma superfície dada.

11. (a) (Falsa) Veja por que é falsa no próximo item.

    (b) (Verdadeira) Temos $(a,b) = (1,2)$, $\dfrac{\partial F}{\partial x}(1,2) = 2$ e $\dfrac{\partial F}{\partial y}(1,2) = 3$, $c = F(1,2) = -5$,

$$\text{então } z - c = \frac{\partial F}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial F}{\partial y}(y-b) \Rightarrow z-(-5) = 2(x-1)+3(y-2)$$

$$z+5 = 2(x-1)+3(y-2)$$

(c) (Verdadeira) Podemos escrever z = G(x, y) para a equação do plano tangente no ponto (1, 2, F(1,2)).

(d) (Verdadeira) Como G(x, y) é a equação do plano tangente à curva F(x, y), então para pontos bem próximos à (1, 2) teremos aproximações G(1.1, 2.1) $\approx$ F(1.1, 2.1)

d) Como G é a equação do plano tangente à função no ponto (1, 2, F(1, 2)), a função será diferenciável nas vizinhanças do referido ponto. Dessa forma, G(1.1,2.1) nos dará um plano tangente nas vizinhanças de (1,2,F(1,2)) e, por isso, também vizinho de (1.1,2.1). Assim sendo, G(1.1,2.1) será um valor aproximado de F(1.1,2.1).