



UNIVERSIDADE ESTADUAL VALE DO ACARAÚ  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS  
CAMPUS DA CIDA  
CURSO DE MATEMÁTICA  
CÁLCULO NUMÉRICO COMPUTACIONAL  
FRANCISCO FAGNER PORTELA AGUIAR

### LISTA DE EXERCÍCIOS 04 - RESPOSTAS

#### QUESTÃO 01.

a) Se  $f(x) = \operatorname{sen}(x) \cos(x)$  então temos que:

$$f'(x) = \cos(x) \cos(x) - \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(x)$$

$$f'(x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)$$

■

Dessa forma, a sentença é **FALSA**.

b) Pelo que foi mostrado anteriormente,

$$f'(x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)$$

e não

$$f'(x) = \cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x)$$

■

Portanto, a sentença é **FALSA**.

c) Para  $P(x) = (x + a)(x + b)(x + c)$  temos:

$$P'(x) = 1(x + b)(x + c) + (x + a)[1(x + c) + (x + b)1]$$

$$P'(x) = (x + b)(x + c) + (x + a)[(x + c) + (x + b)]$$

$$P'(x) = (x + b)(x + c) + (x + a)(x + c) + (x + a)(x + b)$$

■

Dessa forma, a sentença é **VERDADEIRA**.

d) Se  $P(x) = (x + a)(x + b)(x + c)$ , sabemos do Cálculo (pelo Teorema do Valor Médio) que entre duas de suas raízes consecutivas existe, pelo menos, um ponto em que  $P'(x) = 0$ . Ou seja, há pelo menos um ponto entre tais raízes tal que  $P(x)$  assume um máximo ou mínimo relativo. Pois bem! Vamos então buscar as raízes de  $P(x)$  e verificar em que intervalo está(ão) esse(s) ponto(s). Já que  $P(x) = (x + a)(x + b)(x + c)$  então:

$$(x + a)(x + b)(x + c) = 0$$

$$x + a = 0$$

$$x + b = 0$$

$$x + c = 0$$

$$x = -a$$

$$x = -b$$

$$x = -c$$

Dessa forma, as raízes de  $P(x)$  são  $-a$ ,  $-b$  e  $-c$ . Assim, o intervalo em que teremos uma raiz de  $P'(x)$  é  $[-a, -b]$  e  $[-b, -c]$ , e não  $[a, b]$  e  $[b, c]$ , como afirma a lista.

■

## FALSA

e) Se  $P(x) = (x - a_1) \dots (x - a_n) = \prod_{i=1}^n (x - a_i)$  para  $(a_i)_i = 1, 2, \dots, n$ , então, vamos analisar como fica o sinal de  $P(x)$  para alguns valores de  $x$ . Tomemos inicialmente  $x < a_1$ . Dessa forma, cada parcela do produto será negativa e  $P(x)$  será composto de  $n$  parcelas negativas. Logo, se  $n$  for par  $P(x)$  será positivo; caso contrário, será negativo.

Para  $x$  entre  $a_1$  e  $a_2$  teremos uma troca de sinal de  $P(x)$ . Se estivesse negativo anteriormente passará a positivo e, se estivesse positivo, ficará negativo. Entre  $a_2$  e  $a_3$  nova troca de sinal é verificada. Dessa forma, toda vez que passamos por uma raiz de  $P(x)$  verificamos uma troca de sinal até chegarmos ao caso de  $x > a_n$  onde o polinômio terá todas as suas parcelas positivas e, portanto, ficará sempre positivo. Assim sendo, como  $P(x)$  é contínuo, entre estas trocas de sinal de  $P(x)$  há um ponto onde  $P'(x) = 0$ . Como são  $n$  raízes teremos  $n - 1$  intervalos onde estarão todas as raízes de  $P'(x)$ .

## VERDADEIRA

f) Já sabemos do item anterior que cada uma das raízes estará nos intervalos. Para o caso de  $(a_i)_i = 1, 2, \dots, n$  ser estritamente crescente e formado por números reais, sabemos que entre duas raízes quaisquer de  $P(x)$  haverá apenas um ponto de máximo ou de mínimo local, por causa das corcovas da função. Dessa forma, haverá apenas um ponto entre as raízes de  $P(x)$  onde  $P'(x) = 0$ . Assim, temos que o polinômio dado

$$P(x) = (x - a_1) \dots (x - a_n) = \prod_{i=1}^n (x - a_i)$$

terá apenas uma raiz para  $P'(x)$  em cada um dos  $n - 1$  intervalos.

## VERDADEIRA

---

## QUESTÃO 02

a) Para  $a < b < c$  e  $P(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$ , temos que

$$P'(x) = (x - b)(x - c) + (x - a)(x - c) + (x - a)(x - b)$$

Dessa forma, para  $\alpha \in \{a, b, c\}$ , já que  $a \neq b \neq c$  temos, para  $\alpha = a$ :

$$P'(a) = P'(a) = (a - b)(a - c) + (a - a)(a - c)(a - a)(a - b)$$

$$P'(a) = (a - b)(a - c), \text{ que é diferente de zero.}$$

Para  $\alpha = b$  temos:

$$P'(b) = P'(b) = (b - b)(b - c) + (b - a)(b - c)(b - a)(b - b)$$

$$P'(b) = (b - a)(b - c), \text{ que também é diferente de zero.}$$

Tomando agora  $\alpha = c$  temos:

$$P'(c) = P'(c) = (c - b)(c - c) + (c - a)(c - c)(c - a)(c - b)$$

$$P'(c) = (c - a)(c - b), \text{ que mais uma vez é diferente de zero.}$$

Assim sendo, podemos concluir que  $P'(a) \neq 0$  para todo  $\alpha \in \{a, b, c\}$ .

■

## VERDADEIRA

b) Dados  $a < b < c$  e  $P(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$ , então

$$P'(x) = (x - b)(x - c) + (x - a)(x - c) + (x - a)(x - b)$$

Portanto, podemos escrever

$$P'(x) = \frac{(x - a)(x - b)(x - c)}{(x - a)} + \frac{(x - a)(x - b)(x - c)}{(x - b)} + \frac{(x - a)(x - b)(x - c)}{(x - c)} \Rightarrow$$

$$P'(x) = \frac{P(x)}{(x - a)} + \frac{P(x)}{(x - b)} + \frac{P(x)}{(x - c)}$$

Daí, se fizermos  $P_\alpha(x) = \frac{P(x)}{(x - \alpha)}$ , temos:

$$P'(x) = P_a(x) + P_b(x) + P_c(x) \Rightarrow$$

$$P'(x) = \sum_{\alpha \in \{a,b,c\}} P_\alpha(x)$$

■

Diante do exposto, fica provado que a sentença é **VERDADEIRA**.

c) Se  $Q(x) = \sum_{\alpha \in \{a,b,c\}} \frac{P_\alpha(x)}{P'(\alpha)}$ , então, temos que

$$Q(x) = \frac{P_a(x)}{P'(\alpha)} + \frac{P_b(x)}{P'(\alpha)} + \frac{P_c(x)}{P'(\alpha)}$$

A partir daqui, sabendo que  $P_\alpha(x) = \frac{P(x)}{(x-\alpha)}$  tem grau 2, pois é o resultado da divisão

de  $P(x)$  (que é do 3º grau) por  $(x-\alpha)$  que tem grau 1, e que  $P'(\alpha)$  é um valor numérico

e, portanto, tem grau 0, então segue que cada parcela do somatório  $\sum_{\alpha \in \{a,b,c\}} \frac{P_\alpha(x)}{P'(\alpha)}$  tem grau também 2 (pois não há redução no grau). Assim sendo,  $Q(x)$  tem também grau 2.

**VERDADEIRA**

d) Se  $Q(x) = \sum_{\alpha \in \{a,b,c\}} \frac{P_\alpha(x)}{P'(\alpha)}$ , já sabemos do item anterior que seu grau é 2. Vamos agora analisar como fica o valor de  $Q(x)$  quando  $\alpha$  assume o valor de alguma raiz de  $P(x)$ . Para isso, analisemos os seguintes casos:

$$P_\alpha(x) = \frac{P(x)}{(x-\alpha)} = \frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{(x-\alpha)}$$

$$P'(\alpha) = (x-b)(x-c) + (x-a)(x-c) + (x-a)(x-b)$$

Lembrando que:

- para  $\alpha = a$ ,  $P_\alpha(x) = (x-b)(x-c)$ ;
- para  $\alpha = b$ ,  $P_\alpha(x) = (x-a)(x-c)$ ;
- para  $\alpha = c$ ,  $P_\alpha(x) = (x-a)(x-b)$ .

Então, para  $\alpha \in \{a, b, c\}$ , onde  $a, b, c$  são raízes de  $P(x)$ , podemos escrever

$$Q(x) = \frac{P_a(x)}{P'(\alpha)} + \frac{P_b(x)}{P'(\alpha)} + \frac{P_c(x)}{P'(\alpha)} \Rightarrow$$

$$Q(x) = \frac{P_a(x) + P_b(x) + P_c(x)}{P'(\alpha)}$$

Seguindo este raciocínio, analisemos os seguintes valores de  $\alpha$ .

$$\alpha = a \rightarrow$$

$$P_a(a) = (a - b)(a - c);$$

$$P_b(a) = (a - a)(a - c) = 0;$$

$$P_c(a) = (a - a)(a - b) = 0.$$

$$P'(a) = (a - b)(a - c) + (a - a)(a - c) + (a - a)(a - b) = (a - b)(a - c).$$

Então,

$$Q(x) = \frac{(a - b)(a - c) + 0 + 0}{(a - b)(a - c)} = \frac{(a - b)(a - c)}{(a - b)(a - c)} = 1$$

■

Para  $\alpha = b$  temos:

$$P_a(b) = (b - b)(b - c) = 0;$$

$$P_b(b) = (b - a)(b - c);$$

$$P_c(b) = (b - a)(b - b) = 0.$$

$$P'(b) = (b - b)(b - c) + (b - a)(b - c) + (b - a)(b - b) = (b - a)(b - c).$$

Temos então:

$$Q(x) = \frac{0 + (b - a)(b - c) + 0}{(b - a)(b - c)} = \frac{(b - a)(b - c)}{(b - a)(b - c)} = 1$$

■

Por último, façamos  $\alpha = c$ :

$$P_a(c) = (c - b)(c - c) = 0;$$

$$P_b(c) = (c - a)(c - c) = 0;$$

$$P_c(c) = (c - a)(c - b).$$

$$P'(a) = (c - b)(c - c) + (c - a)(c - c) + (c - a)(c - b) = (c - a)(c - b).$$

Teríamos então:

$$Q(x) = \frac{0 + 0 + (c - a)(c - b)}{(c - a)(c - b)} = \frac{(c - a)(c - b)}{(c - a)(c - b)} = 1$$

■

Dessa maneira,  $Q(x) = \sum_{\alpha \in \{a, b, c\}} \frac{P_\alpha(x)}{P'(\alpha)}$  é um polinômio de grau 2 cujo valor é 1 nas raízes de  $P$ .

**VERDADEIRA**

e) Sejam  $P(a_1, b_1)$  e  $Q(a_2, b_2)$  dois pontos quaisquer. Suponhamos que existam duas funções distintas que passem por esses dois pontos. Sejam estas funções a seguir, cujos coeficientes angulares são  $m$  e  $n$ , respectivamente:

$$b_2 = b_1 + m(a_2 - a_1)$$

$$b_2 = b_1 + n(a_2 - a_1)$$

Então podemos escrever:

$$b_1 + m(a_2 - a_1) = b_1 + n(a_2 - a_1)$$

$$m(a_2 - a_1) = b_1 - b_1 + n(a_2 - a_1)$$

$$m(a_2 - a_1) = n(a_2 - a_1)$$

Como  $P$  e  $Q$  são dois pontos distintos, podemos escrever:

$$m = \frac{n(a_2 - a_1)}{(a_2 - a_1)} \Rightarrow m = n$$

■

Portanto, como as duas funções possuem  $m = n$ , o coeficiente angular de tais retas são iguais, o que nos faz concluir que as duas funções, supostas diferentes, na verdade são iguais. Portanto, existe uma única função do 1º grau que passa por dois pontos distintos.

**VERDADEIRA**

f) Sabemos que por três pontos podemos traçar uma curva no formato de parábola. Pois bem! Sejam  $Q(x_0, y_0)$ ,  $R(x_1, y_1)$  e  $S(x_2, y_2)$  os pontos. Assim, podemos escrever:

$$\begin{cases} P(x_0) = y_0 \\ P(x_1) = y_1 \\ P(x_2) = y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 = y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 = y_1 \\ a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 = y_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Observando o sistema de equações acima, como a primeira matriz tem determinante diferente de zero, concluímos que o referido sistema tem solução única. Dessa forma, há apenas uma parábola que passa por esses três pontos.

■

## VERDADEIRA

g) Para o caso de  $n$  pontos, podemos fazer de maneira semelhante à anterior, com a diferença de que, como temos  $n$  pontos, nosso trabalho aumenta em demasia. Vamos lá! Arregacemos as mangas!!! Sejam  $Q_0(x_0, y_0)$ ,  $Q_1(x_1, y_1)$ , ...,  $Q_n(x_{n-1}, y_{n-1})$  os pontos. Se  $P(x)$  for o polinômio, temos

$$\begin{cases} P(x_0) = y_0 \\ P(x_1) = y_1 \\ \dots \\ P(x_{n-1}) = y_{n-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 + a_1x_0 + \dots + a_{n-1}x_0^{n-1} = y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + \dots + a_{n-1}x_1^{n-1} = y_1 \\ \dots \\ a_0 + a_1x_{n-1} + \dots + a_{n-1}x_{n-1}^{n-1} = y_{n-1} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^{n-1} \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \dots \\ y_{n-1} \end{bmatrix}$$

Diante deste sistema de equações, percebemos a presença de uma matriz de Vandermonde. Como sabemos que as coordenadas dos pontos são diferentes, pois se trata de pontos distintos, podemos concluir que o determinante dessa matriz de Vandermonde será diferente de zero, o que significa que o sistema tem solução única. Desta forma, podemos concluir que existe apenas um polinômio de grau  $n - 1$  que passa por todos esses pontos, ou seja, há apenas um único valor para  $a_0, a_1, \dots, a_n$ .

■

**VERDADEIRA**

**h)** Para mostrarmos para o caso de  $P$  ter grau menor ou igual a  $n - 1$ , tomemos  $P$  com grau  $n - 1$ . Já que este polinômio assume  $n$  vezes o mesmo valor, podemos escrever:

$$\begin{cases} P(x_1) = c \\ P(x_2) = c \\ \dots \\ P(x_n) = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 + a_1x_1 + \dots + a_{n-1}x_1^{n-1} = c \\ a_0 + a_1x_2 + \dots + a_{n-1}x_2^{n-1} = c \\ \dots \\ a_0 + a_1x_n + \dots + a_{n-1}x_n^{n-1} = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ c \\ \dots \\ c \end{bmatrix}$$

Do produto matricial, podemos perceber que a primeira matriz é quadrada e de ordem  $n \times n$  do tipo Vandermond. Como todos os  $x_i$ s são diferentes um do outro, seu determinante é diferente de zero, o que me garante que o sistema tem solução única. Vamos agora imaginar como resolveríamos esse sistema através do cálculo de determinante. Deveríamos calcular o determinante do tipo Vandermond, que já comentamos ser diferente de zero. Para podermos visualizar melhor, chamemos essa matriz de Vandermond de matriz  $A$ , e seu determinante de  $\det A$ . Assim,

$$\det A = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \dots (x_n - x_2)(x_3 - x_2) \dots (x_n - x_{n-1}) \Rightarrow \det A \neq 0.$$

Logo após, iríamos calcular o determinante de cada matriz dos coeficientes. Para tal fato teríamos que, ordenadamente, substituir uma a uma cada coluna da matriz de Vandermond pela matriz coluna dos resultados e tirar o seu determinante. Vejamos alguns casos:

$$Aa_0 = \begin{bmatrix} c & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ c & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}, Aa_1 = \begin{bmatrix} 1 & c & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & c & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & c & \dots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}, \dots, Aa_{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \dots & c \\ 1 & x_2 & \dots & c \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & c \end{bmatrix}$$

Como podemos observar, apenas  $\det Aa_0 \neq 0$ . Todos os demais determinantes resultam em zero, pois possuem duas colunas múltiplas entre si (uma coluna igual a 1 e outra igual a  $c$ ). Com isso, todos os demais termos da forma  $a_i = 0$ , restando apenas  $a_0 \neq 0$ . Desta forma,  $P(x) = a_0$ , sendo portanto constante e de zero grau.



**VERDADEIRA**

**i)** Na opção **d** desta mesma questão, mostramos que  $Q(x) = \sum_{\alpha \in \{a,b,c\}} \frac{P_\alpha(x)}{P'(\alpha)}$  é sempre

igual a 1 nos nós (raízes) do polinômio  $P(x)$ . Também na referida opção pudemos observar que o grau de  $Q(x)$  é menor que o grau de  $P(x)$  ( $Q(x)$  tinha grau 2 e  $P(x)$  tinha

grau 3) e, portanto, a quantidade de vezes em que  $Q(x) = 1$  era maior que o seu grau, uma vez que o número de raízes de  $P(x)$  era maior que o grau de  $Q(x)$ . Agora podemos unir essa observação à conclusão a que chegamos no item anterior, em que mostramos que se uma função assume um mesmo valor uma quantidade de vezes superior ao seu grau, então ela é constante. Pois bem! Como  $Q(x)$  tem grau 2 e  $P(x)$  tem grau 3 (portanto maior) e  $Q(x) = 1$  três vezes, então, pelo que foi mostrado anteriormente,  $Q(x)$  é constante.

## VERDADEIRA

j) De opções anteriores sabemos que se  $P(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$  é um polinômio de

grau 3, temos que  $Q(x) = \sum_{\alpha \in \{a,b,c\}} \frac{P_\alpha(x)}{P'(\alpha)}$  tem grau 2. Para o caso em que vamos tratar

agora, devemos ter em mente que uma função  $h$  tal que  $h: \alpha \in \{a,b,c\} \mapsto h(\alpha) \in \mathbb{R}$  assume um valor numérico e, com isso, tem grau 0. Dessa forma, se tomarmos  $Q(x) =$

$= \sum_{\alpha \in \{a,b,c\}} \frac{h(\alpha)P_\alpha(x)}{P'(\alpha)}$ , teremos que  $Q(x)$  também terá grau 2, por causa do grau zero de

$h(\alpha)$ . Agora procuremos o valor de  $Q(x)$ . Pelo que já fizemos no item *d*, sabemos que  $Q(x) =$

$= \sum_{\alpha \in \{a,b,c\}} \frac{P_\alpha(x)}{P'(\alpha)} = 1$  para todo  $\alpha \in \{a,b,c\}$ ,  $a, b, c$  raízes de  $P(x)$ . Agora observemos a

nova definição de  $Q(x)$ :

$$Q(x) = \sum_{\alpha \in \{a,b,c\}} \frac{h(\alpha)P_\alpha(x)}{P'(\alpha)}$$

Então podemos escrever

$$Q(a) = \sum_{\alpha \in \{a,b,c\}} \frac{h(\alpha)P_\alpha(x)}{P'(\alpha)} \Rightarrow Q(a) = \frac{h(a)P_a(x)}{P'(a)} + \frac{h(a)P_b(x)}{P'(a)} + \frac{h(a)P_c(x)}{P'(a)}$$

Vamos agora fazer  $a$  assumir os valores das raízes de  $P(x)$ . Vamos aqui aproveitar as respostas já encontradas no item *d* anterior. Façamos:

- $a = a$ :

$$P_a(a) = (a - b)(a - c);$$

$$P_b(a) = (a - a)(a - c) = 0;$$

$$P_c(a) = (a - a)(a - b) = 0.$$

$$P'(a) = (a-b)(a-c) + (a-a)(a-c) + (a-a)(a-b) = (a-b)(a-c).$$

$$Q(\alpha) = \frac{h(\alpha)P_a(a)}{P'(\alpha)} + \frac{h(\alpha)P_b(a)}{P'(\alpha)} + \frac{h(\alpha)P_c(a)}{P'(\alpha)} \Rightarrow$$

$$Q(\alpha) = \frac{h(\alpha)P_a(a) + h(\alpha)P_b(a) + h(\alpha)P_c(a)}{P'(\alpha)} \Rightarrow$$

$$Q(\alpha) = \frac{h(\alpha)(a-b)(a-c) + h(\alpha).0 + h(\alpha).0}{(a-b)(a-c)} \Rightarrow$$

$$Q(\alpha) = \frac{h(\alpha)(a-b)(a-c) + 0 + 0}{(a-b)(a-c)} \Rightarrow$$

$$Q(\alpha) = \frac{h(\alpha)(a-b)(a-c)}{(a-b)(a-c)} \Rightarrow$$

$$Q(\alpha) = h(\alpha).1 \Rightarrow$$

$$Q(\alpha) = h(\alpha)$$

- $a = b$ :

$$P_a(b) = (b-b)(b-c) = 0;$$

$$P_b(b) = (b-a)(b-c);$$

$$P_c(b) = (b-a)(b-b) = 0.$$

$$P'(a) = (b-b)(b-c) + (b-a)(b-c) + (b-a)(b-b) = (b-a)(b-c).$$

$$Q(\alpha) = \frac{h(\alpha)P_a(b)}{P'(\alpha)} + \frac{h(\alpha)P_b(b)}{P'(\alpha)} + \frac{h(\alpha)P_c(b)}{P'(\alpha)} \Rightarrow$$

$$Q(\alpha) = \frac{h(\alpha)P_a(b) + h(\alpha)P_b(b) + h(\alpha)P_c(b)}{P'(\alpha)} \Rightarrow$$

$$Q(\alpha) = \frac{h(\alpha).0 + h(\alpha)(b-a)(b-c) + h(\alpha).0}{(b-a)(b-c)} \Rightarrow$$

$$Q(\alpha) = \frac{0 + h(\alpha)(b-a)(b-c) + 0}{(b-a)(b-c)} \Rightarrow$$

$$Q(\alpha) = \frac{h(\alpha)(b-a)(b-c)}{(b-a)(b-c)} \Rightarrow$$

$$Q(\alpha) = h(\alpha).1 \Rightarrow$$

$$Q(\alpha) = h(\alpha)$$



- $\alpha = c$ :

$$P_a(c) = (c - b)(c - c) = 0;$$

$$P_b(c) = (c - a)(c - c) = 0;$$

$$P_c(c) = (c - a)(c - b).$$

$$P'(c) = (c - b)(c - c) + (c - a)(c - c) + (c - a)(c - b) = (c - a)(c - b).$$

$$Q(\alpha) = \frac{h(\alpha)P_a(c)}{P'(c)} + \frac{h(\alpha)P_b(c)}{P'(c)} + \frac{h(\alpha)P_c(c)}{P'(c)} \Rightarrow$$

$$Q(\alpha) = \frac{h(\alpha)P_a(c) + h(\alpha)P_b(c) + h(\alpha)P_c(c)}{P'(c)} \Rightarrow$$

$$Q(\alpha) = \frac{h(\alpha).0 + h(\alpha).0 + h(\alpha)(c - a)(c - b)}{(c - a)(c - b)} \Rightarrow$$

$$Q(\alpha) = \frac{0 + 0 + h(\alpha)(c - a)(c - b)}{(c - a)(c - b)} \Rightarrow$$

$$Q(\alpha) = \frac{h(\alpha)(c - a)(c - b)}{(c - a)(c - b)} \Rightarrow$$

$$Q(\alpha) = h(\alpha).1 \Rightarrow$$

$$Q(\alpha) = h(\alpha)$$



Dessa forma, para todo valor que seja raiz de  $P(x)$  teremos que  $Q(\alpha) = h(\alpha)$ . Assim sendo, teremos que a função  $h$  passa ou interpola as raízes do polinômio e, então, teremos que  $Q$  é um polinômio de grau 2 que passa por  $(a, h(a))$ ,  $(b, h(b))$  e  $(c, h(c))$ .

**VERDADEIRA**

---

### QUESTÃO 03

a) Para  $(a_i)_{i=1, \dots, n}$  estritamente crescente e  $P(x) = (x - a_1) \cdots (x - a_n) = \prod_{i=1}^n (x - a_i)$ , aplicando a regra da derivada do produto de funções, temos que

$$P'(x) = (x - a_2) \cdots (x - a_n) + (x - a_1) \cdots (x - a_n) + \cdots + (x - a_1) \cdots (x - a_{n-1})$$

Portanto, podemos escrever que

$$P'(a_1) = (a_1 - a_2) \cdots (a_1 - a_n) + (a_1 - a_1) \cdots (a_1 - a_n) + \cdots + (a_1 - a_1) \cdots (a_1 - a_{n-1}) \Rightarrow$$

$$P'(a_1) = (a_1 - a_2) \cdots (a_1 - a_n) + 0 \cdots (a_1 - a_n) + \cdots + 0 \cdots (a_1 - a_{n-1}) \Rightarrow$$

$$P'(a_1) = (a_1 - a_2) \cdots (a_1 - a_n) \neq 0$$

■

De maneira geral, podemos escrever

$$P'(a_i) = (a_i - a_2) \cdots (a_i - a_i) \cdots (a_i - a_n) + (a_i - a_1) \cdots (a_i - a_i) \cdots (a_i - a_n) + \cdots +$$

$$+ (a_i - a_1) \cdots (a_i - a_{n-2})(a_i - a_{n-1})$$

$$P'(a_i) = (a_i - a_2) \cdots 0 \cdots (a_i - a_n) + (a_i - a_1) \cdots 0 \cdots (a_i - a_n) + \cdots +$$

$$+ (a_i - a_1) \cdots (a_i - a_{n-2})(a_i - a_{n-1})$$

$$P'(a_i) = (a_i - a_1) \cdots (a_i - a_{n-2})(a_i - a_{n-1}) \neq 0$$

Desta maneira, para todo  $(a_i)_{i=1, \dots, n}$  temos que  $P'(a_i) \neq 0$ .

■

### VERDADEIRA

b) Podemos mostrar esta questão de maneira parecida com a anterior. Para isto, seja

$$a < b < c$$

Se  $P(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$ , então

$$P'(x) = (x - b)(x - c) + (x - a)(x - c) + (x - a)(x - b)$$

Tomemos  $x_0 = a$ , então

$$P'(x_0) = (a - b)(a - c) + (a - a)(a - c) + (a - a)(a - b)$$

$$P'(x_0) = (a - b)(a - c)$$

$$P'(x_0) \neq 0$$

■

Para  $x_0 = b$ , temos:

$$P'(x_0) = (b - b)(b - c) + (b - a)(b - c) + (b - a)(b - b)$$

$$P'(x_0) = (b - a)(b - c)$$

$$P'(x_0) \neq 0$$

■

Tomando agora  $x_0 = c$ , temos que:

$$P'(x_0) = (c - b)(c - c) + (c - a)(c - c) + (c - a)(c - b)$$

$$P'(x_0) = (c - a)(c - b)$$

$$P'(x_0) \neq 0$$

■

Com isso, podemos afirmar que, para todo  $x_0 \in \{a, b, c\}$  temos que  $P'(x_0) \neq 0$ .

## VERDADEIRA

c) Do item a desta mesma questão sabemos que

$$P'(x) = (x - a_2) \cdots (x - a_n) + (x - a_1) \cdots (x - a_n) + \cdots + (x - a_1) \cdots (x - a_{n-1})$$

Então fica fácil escrever

$$P'(x) = \frac{(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)}{(x - a_1)} + \frac{(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)}{(x - a_2)} + \cdots + \frac{(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)}{(x - a_n)}$$

$$P'(x) = \frac{P(x)}{(x - a_1)} + \frac{P(x)}{(x - a_2)} + \cdots + \frac{P(x)}{(x - a_n)} \Rightarrow$$

$$P'(x) = P_{a_1}(x) + P_{a_2}(x) + \cdots + P_{a_n}(x)$$

Daí, se denotarmos por  $P_\alpha(x) = \frac{P(x)}{(x - \alpha)}$ , então podemos escrever

$$P'(x) = \sum_{\alpha \in \{a_1, a_2, \dots, a_n\}} P_\alpha(x)$$

■

Na lista fala que  $P'(x) = \sum_{\alpha \in \{a, b, c\}} P_\alpha(x)$  sem afirmar que  $a, b, c$  são raízes de  $P(x)$ .

Portanto, a sentença é **FALSA**.

**d)** Novamente aqui retomamos a expressão que nos dá a derivada de um polinômio

$$P(x) = (x - a_1) \cdots (x - a_n)$$

encontrada no item **a** anterior e aprimorada no item **c**

$$P'(x) = (x - a_2) \cdots (x - a_n) + (x - a_1) \cdots (x - a_n) + \cdots + (x - a_1) \cdots (x - a_{n-1})$$

$$P'(x) = \frac{(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)}{(x - a_1)} + \frac{(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)}{(x - a_2)} + \cdots + \frac{(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)}{(x - a_n)}$$

Se definimos  $P_i(x) = \frac{P(x)}{(x - a_i)}$  então podemos escrever

$$P'(x) = \frac{P(x)}{(x - a_1)} + \frac{P(x)}{(x - a_2)} + \cdots + \frac{P(x)}{(x - a_n)}$$

$$P'(x) = P_1(x) + P_2(x) + \cdots + P_n(x)$$

$$P'(x) = \sum_{i=1}^n P_i(x)$$

■

**VERDADEIRA**

**e)** Como  $P(x) = (x - a_1) \cdots (x - a_n) = \prod_{i=1}^n (x - a_i)$ , então  $P(x)$  tem grau  $n$ . Por definição,

$$P_i(x) = \frac{P(x)}{(x - a_i)}$$

Então temos um polinômio de grau  $n$  sendo dividido por um monômio de grau 1, o que resulta em algo com grau 1 unidade inferior. Deste modo, o grau de cada termo  $P_i(x)$  vale  $n - 1$ . Tomemos

$$Q(x) = \sum_{i=1}^n P_i(x)$$

Assim, como  $Q(x)$  é o somatório de  $n$  parcelas, cada uma com grau  $n - 1$ ,  $Q(x)$  terá grau também  $n - 1$ .

### VERDADEIRA

f) Sendo  $P(x) = (x - a_1) \cdots (x - a_n) = \prod_{i=1}^n (x - a_i)$ ,  $(a_i)_{i=1, \dots, n}$  estritamente crescente,

$P_i(x) = \frac{P(x)}{(x - a_i)}$ , vamos agora definir  $Q(x)$  de outra maneira. Seja

$$Q(x) = \sum_{i=1}^n \frac{P_i(x)}{P'(a_i)}$$

Podemos, de imediato, afirmar que  $Q(x)$  tem grau  $n - 1$ . Isto ocorre porque, como já falamos,  $P_i(x)$  tem grau  $n - 1$ . Dessa forma, sabendo que  $P'(a_i)$  é um valor numérico, seu grau vale zero. Assim sendo, ao dividirmos  $P_i(x)$  por  $P'(a_i)$  obtemos  $Q(x)$  com grau igual ao de  $P_i(x)$ , já que não houve redução de grau. Desta maneira, podemos concluir que  $Q(x)$  tem grau  $n - 1$ .

Vamos agora analisar o valor de  $Q(x)$  em cada uma das raízes de  $P(x)$ . Seja  $a_i$  uma raiz de  $P(x)$ . Assim podemos escrever:

$$Q(a_i) = \sum_{i=1}^n \frac{P_i(a_i)}{P'(a_i)} \Rightarrow Q(a_i) = \frac{P_i(a_i)}{P'(a_i)}$$

Vamos então verificar quanto vale a relação  $\frac{P_i(a_i)}{P'(a_i)}$ . Para isso, vamos recorrer à definição de cada uma delas. Sabemos que:

$$P_i(x) = \frac{P(x)}{x - a_i} \Rightarrow P_i(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_{i-1})(x - a_{i+1}) \cdots (x - a_n)$$

e que

$$P'(x) = (x - a_2) \cdots (x - a_i) \cdots (x - a_n) + (x - a_1) \cdots (x - a_i) \cdots (x - a_n) + \cdots + \\ + (x - a_1) \cdots (x - a_{n-1})$$

Assim sendo, para  $x = a_i$  temos que:

$$P'(a_i) = (a_i - a_2) \cdots (a_i - a_i) \cdots (a_i - a_n) + (a_i - a_1) \cdots (a_i - a_i) \cdots (a_i - a_n) + \cdots + \\ + (a_i - a_1) \cdots (a_i - a_{n-1}) \Rightarrow$$

$$P'(a_i) = (a_i - a_1) (a_i - a_2) \cdots (a_i - a_{i-1}) (a_i - a_{i+1}) \dots (a_i - a_{n-1})$$

Deste modo,

$$Q(a_1) = \frac{(a_i - a_1)(a_i - a_2) \dots (a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1}) \dots (a_i - a_n)}{(a_i - a_1)(a_i - a_2) \dots (a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1}) \dots (a_i - a_n)} \Rightarrow$$

Então

$$Q(a_1) = \frac{P_i(a_i)}{P_i(a_i)} Q(a_1) = 1$$

Como nossa suposição era de que  $a_i$  era uma raiz qualquer de  $P(x)$ , então podemos afirmar que  $Q(a_1) = 1$  para qualquer raiz do polinômio em estudo.

■

## VERDADEIRA

**g)** Podemos “pegar carona” no item **h** da questão 2 para resolver este item. Lá tínhamos que a função  $Q$  tinha grau menor ou igual a  $n - 1$  e assumia o mesmo valor  $n$  vezes, aqui esta função possui grau  $n - 1$  e assume este mesmo valor  $n$  vezes. Desta forma, podemos escrever:

$$\begin{cases} P(x_1) = c \\ P(x_2) = c \\ \dots \\ P(x_n) = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_{n-1} x_1^{n-1} = c \\ a_0 + a_1 x_2 + \dots + a_{n-1} x_2^{n-1} = c \\ \dots \\ a_0 + a_1 x_n + \dots + a_{n-1} x_n^{n-1} = c \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ c \\ \dots \\ c \end{bmatrix}$$

Do produto matricial, podemos perceber que a primeira matriz é quadrada e de ordem  $n \times n$  do tipo Vandermond. Como todos os  $x_i$ s são diferentes um do outro, seu determinante é diferente de zero, o que me garante que o sistema tem solução única. Vamos agora imaginar como resolveríamos esse sistema através do cálculo de determinante. Deveríamos calcular o determinante do tipo Vandermond, que já comentamos ser diferente de zero. Para podermos visualizar melhor, chamemos essa matriz de Vandermond de matriz  $A$ , e seu determinante de  $\det A$ . Assim,

$$\det A = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdots (x_n - x_2)(x_3 - x_2) \cdots (x_n - x_{n-1}) \Rightarrow \det A \neq 0.$$

Logo após, iríamos calcular o determinante de cada matriz dos coeficientes. Para tal fato teríamos que, ordenadamente, substituir uma a uma cada coluna da matriz de Vandermond pela matriz coluna dos resultados e tirar o seu determinante. Vejamos alguns casos:

$$Aa_0 = \begin{bmatrix} c & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ c & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}, Aa_1 = \begin{bmatrix} 1 & c & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & c & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & c & \dots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}, \dots, Aa_{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \dots & c \\ 1 & x_2 & \dots & c \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & c \end{bmatrix}$$

Como podemos observar, apenas  $\det Aa_0 \neq 0$ . Todos os demais determinantes resultam em zero, pois possuem duas colunas múltiplas entre si (uma coluna igual a 1 e outra igual a  $c$ ). Com isso, todos os demais termos da forma  $a_i = 0$ , restando apenas  $a_0 \neq 0$ . Desta forma,  $P(x) = a_0$ , sendo portanto constante e de zero grau.



## VERDADEIRA

**h)** Novamente aqui vamos “pegar carona” em questões que já resolvemos. Desta feita, vamos tomar os dois últimos itens (**f** e **g**). De **f** sabemos que o grau de  $P$  é igual a  $n$  e que  $Q$  tem grau  $n - 1$ , portanto menor que o grau de  $P$ , e é igual a 1 em cada uma das raízes de  $P$ . No item **g** vimos que se uma função de grau  $n - 1$  tiver  $n$  valores constantes então ela é constante e de grau zero. Pois bem! Agora vamos juntar essas duas conclusões para alcançarmos o que queremos.

A função  $Q(x) = \sum_{i=1}^n \frac{P_i(x)}{P'(a_i)}$  é sempre igual a 1 nas  $n$  raízes de  $P(x)$  (isso já foi provado) e possui grau menor que  $n$  (seu grau é  $n - 1$ ). Então podemos afirmar que  $Q(x)$  é sempre constante e igual a 1.

■

## VERDADEIRA

i) A definição da função apresenta um problema de definição, mas vamos consertar. Em vez de  $h : \alpha \in \{b_1, \dots, b_n\} \mapsto h(\alpha) \in \mathbb{R}$ , tomemos  $h : \alpha \in \{a_1, \dots, a_n\} \mapsto h(\alpha) \in \mathbb{R}$ . vamos

também trocar  $Q(x) = \sum_{i=1}^n \frac{h(b_i)P_i(x)}{P'(a_i)}$  por  $Q(x) = \sum_{i=1}^n \frac{h(a_i)P_i(x)}{P'(a_i)}$ .

Podemos escrever

$$Q(x) = \frac{h(a_1)P_1(x)}{P'(a_1)} + \frac{h(a_2)P_2(x)}{P'(a_2)} + \dots + \frac{h(a_i)P_i(x)}{P'(a_i)} + \dots + \frac{h(a_n)P_n(x)}{P'(a_n)} \Rightarrow$$

$$Q(x) = \frac{h(a_i)[P_1(x) + P_2(x) + \dots + P_i(x) + \dots + P_n(x)]}{P'(a_i)} \Rightarrow$$

$$Q(a_i) = \frac{h(a_i)[P_1(a_i) + P_2(a_i) + \dots + P_i(a_i) + \dots + P_n(a_i)]}{P'(a_i)} \Rightarrow$$

$$Q(a_i) = \frac{h(a_i)[0 + 0 + \dots + P_i(a_i) + \dots + 0]}{P'(a_i)} \Rightarrow$$

$$Q(a_i) = \frac{h(a_i)P_i(a_i)}{P'(a_i)} \Rightarrow$$

$$Q(a_i) = h(a_i)$$

■

Essa última passagem foi possível pois  $P'(a_i) = P_i(a_i)$ . Dessa forma, para todo  $\alpha \in \{a_1, \dots, a_n\}$  temos que  $Q(a_i) = h(a_i)$ . Dessa forma,  $Q$  é um polinômio de grau  $n - 1$  da forma  $(a_i, h(a_i))$ . Assim, podemos dizer que  $Q$  passa ou interpola os pontos da forma  $(a_1, h(a_1)), \dots, (a_n, h(a_n))$ .

## VERDADEIRA

---