Cálculo Numérico Computacional Lista 04

Universidade Estadual Vale do Acaraú
Prof. Tarcísio Praciano Pereira
Alun@: Ana Cibely Aragão Monteiro

01.Derivada algorítmica

Se $f(x) = \sin(x)\cos(x)$, então temos
$f'(x) = -\sin(x)\sin(x) = \cos(x)\cos(x)$
$f'(x) = -sin^2(x) + cos^2(x)$

(a) (F)
(b) (F)

(c) (V)

Se $P(x) = (x+a)(x+b)(x+c)$, então
$P'(x) = (x+a)[(x+b)+(x+c)] + (x+b)(x+c)$
$P'(x) = (x+b)(x+c) + (x+a)(x+c) + (x+a)(x+b)$

(d) (F)

Se $a < b < c$ e $P(x) = (x+a)(x+b)(x+c)$, então para $P(x) = 0$, teremos raízes $-a, -b, -c$, como $-c < -b < -a$, então o certo seria escrever que $P'(x)$ terá exatamente duas raízes que estão nos intervalos $[-c; -b], [-b; -a]$.

(e) (V) O próximo item justifica esta questão.

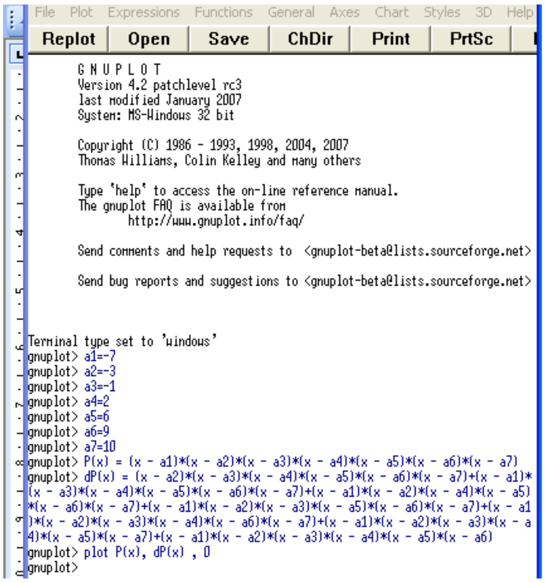
(f) (V)

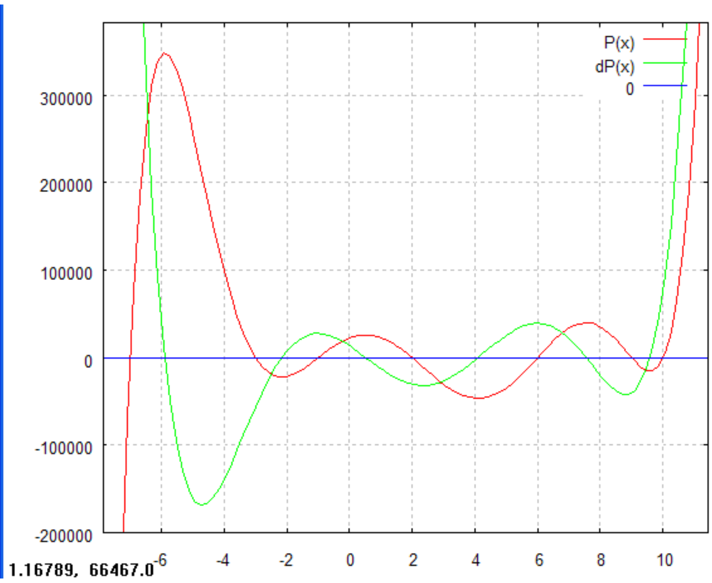
Se $(a_i)_{i=1,\dots,n}$ for uma sucessão estritamente crescente de números reais e se

$$P(x) = (x-a_1)\cdot\ldots\cdot(x-a_n) = \prod_{i=1}^{n}(x-a_i)$$

então $P'(x)$ terá uma raiz em cada um dos n−1 intervalos determinados pelas raízes de P.

Faremos o estudo de um exemplo de $P(x)$ sendo um produto de 7 fatores determinados $(x-a)$
.



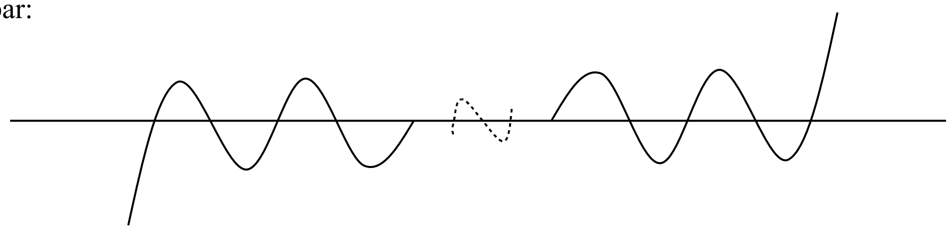


Entre cada um dos intervalos determinados por raízes consecutivas do polinômio há um extremo relativo, como vemos no gráfico. Logo $dP(x)$ terá todas as suas raízes nos 6 intervalos determinados pelas raízes de $P(x)$, cada uma num intervalo. Cada extremo relativo determina um zero da função derivada do polinômio. O que mostra que isso é verdade para um polinômio *P* de qualquer grau.

Façamos o seguinte estudo: Como temos $a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n$, $P(x)$ tem grau *n,* logo possui *n* raízes. Considere os gráficos abaixo para uma melhor compreensão do que acontece.

Sendo o coeficiente do termo de maior grau de *P(x)* positivo, então temos:

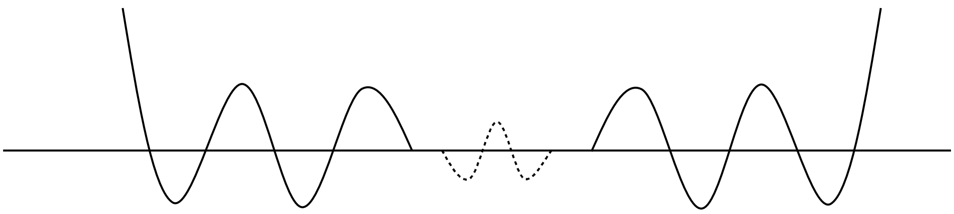
Se *n* for ímpar:



Para $x < a_1$ e $a_i < x < a_{i+1}$ para *i* par, $1 < i < n$, teremos $P(x) < 0$ e

Para $a_i < x < a_{i+1}$ e $x > a_n$, para *i* ímpar, $1 \leq i < n$ teremos $P(x) > 0$

Se *n* for par:

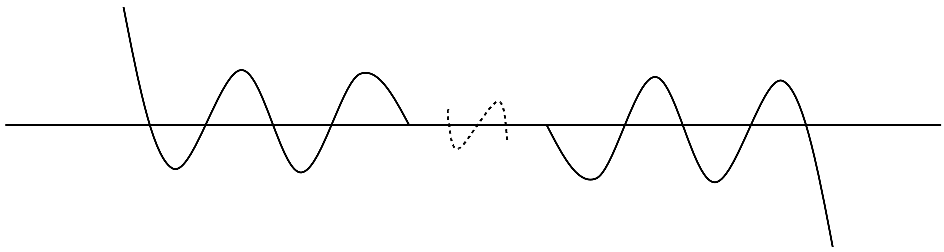


Para $x < a_1$, $a_i < x < a_{i+1}$ e $x > a_n$ para i par, $1 < i < n$, teremos $P(x) > 0$ e

Para $a_i < x < a_{i+1}$, para i ímpar, $1 \leq i < n$ teremos $P(x) < 0$

Agora faremos o estudo quando o coeficiente do termo de maior grau de $P(x)$ é negativo.

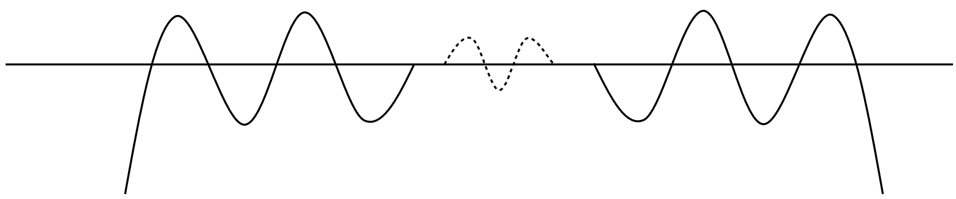
Se n For ímpar:



Para $x < a_1$ e $a_i < x < a_{i+1}$, para i par, $1 < i < n$, teremos $P(x) > 0$ e

Para $a_i < x < a_{i+1}$ e $x > a_n$, para i ímpar, $1 \leq i < n$ teremos $P(x) < 0$.

Se n for par:



Para $x < a_1$, $a_i < x < a_{i+1}$ e $x > a_n$ para i par, $1 < i < n$, teremos $P(x) < 0$ e

Para $a_i < x < a_{i+1}$, para i ímpar, $1 \leq i < n$ teremos $P(x) > 0$.

02.Interpolação Polinomial

(a) (V)

Dados $a < b < c$ e se

$$P(x) = (x - a)(x - b(x - c)$$

Então $P_\alpha \neq 0$ para todo $\alpha \in \{a, b, c\}$.

Se $P(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$,então

$P'(x) = (x-a)[(x-b)+(x-c)] + (x-b)(x-c)=$

$P'(x) = (x-b)(x-c) + (x-a)(x-c) + (x-a)(x-b)$

Para $x=a$, $x=b$ e $x=c$, temos:

$P'(a) = (a-b)(a-c) + (a-a)(a-c) + (a-a)(a-b) = (a-b)(a-c) \neq 0$

$P'(b) = (b-b)(b-c) + (b-a)(b-c) + (b-a)(b-b) = (b-a)(b-c) \neq 0$

$P'(c) = (c-b)(c-c) + (c-a)(c-c) + (c-a)(c-b) = (c-a)(c-b) \neq 0$

(b) (V)

Dados $a < b < c$ e se

$$P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$$

Notação: $P_a(x) = \dfrac{P(x)}{x-a}$ então $P'(x) = \sum_{\alpha\in\{a,b,c\}} P_\alpha(x)$

Devemos mostrar que $P'(x) = (x-b)(x-c) + (x-a)(x-c) + (x-a)(x-b) = \sum_{\alpha\in\{a,b,c\}} P_\alpha(x)$

$$P_a(x) = \frac{P(x)}{x-a} \qquad P_b(x) = \frac{P(x)}{x-b} \qquad P_c(x) = \frac{P(x)}{x-c}$$

$$P_a(x) = \frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{x-a} = (x-b)(x-c)$$

$$P_b(x) = \frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{x-b} = (x-a)(x-c)$$

$$P_c(x) = \frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{x-c} = (x-a)(x-b)$$

$P'(x) = \sum_{\alpha\in\{a,b,c\}} P_\alpha(x) = P_a(x) + P_b(x) + P_c(x) = (x-b)(x-c) + (x-a)(x-c) + (x-a)(x-b)$

(c)(V)

Dados $a < b < c$ e se

$P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$. O grau de $Q(x) = \sum_{\alpha\in\{a,b,c\}} P_\alpha(x)$ é 2.

Notação: $P_\alpha(x) = \dfrac{P(x)}{x-a}$

Devemos mostrar que o grau de $Q(x) = \sum_{\alpha\in\{a,b,c\}} P_\alpha(x)$ é 2, façamos então

$Q(x) = \sum_{\alpha \in \{a,b,c\}} P_\alpha(x) = P'(x) = (x-b)(x-c) + (x-a)(x-c) + (x-a)(x-b) =$
$3x^2 - 2x(a+b+c) + (ac+ab+bc)$, um polinômio do segundo grau, como afirma este item.

(d) (F)

Dados $a < b < c$ e se

$$P(x) = (x-a)(x-b)(x-c).$$

Defina $Q(x) = \sum_{\alpha \in \{a,b,c\}} \frac{P_\alpha(x)}{P'(\alpha)}$. Então Q é um polinômio de grau 2 que vale 1 em cada uma das raízes de P.

Notação: $P_\alpha(x) = \frac{P(x)}{x-a}$

Definamos $Q(x)$:

Temos que:

$$P_a(x) = \frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{x-a} = (x-b)(x-c)$$

$$P_b(x) = \frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{x-b} = (x-a)(x-c)$$

$$P_c(x) = \frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{x-c} = (x-a)(x-b)$$

Temos então:

$P'(x) = (x-b)(x-c) + (x-a)(x-c) + (x-a)(x-b)$

$P'(a) = (a-b)(a-c) + (a-a)(a-c) + (a-a)(a-b) = (a-b)(a-c)$

$P'(b) = (b-b)(b-c) + (b-a)(b-c) + (b-a)(b-b) = (b-a)(b-c)$

$P'(c) = (c-b)(c-c) + (c-a)(c-c) + (c-a)(c-b) = (c-a)(c-b)$

$$Q(x) = \sum_{\alpha \in \{a,b,c\}} \frac{P_\alpha(x)}{P'(\alpha)} = \frac{P_a(x)}{P'(a)} + \frac{P_b(x)}{P'(b)} + \frac{P_c(x)}{P'(c)} =$$

$$\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = =$$

$$\frac{(x-b)(x-c)(c-b)}{[(-1)(b-a)][(-1)(c-a)](c-b)} + \frac{(x-a)(x-c)(c-a)}{(b-a)[(-1)(c-b)](c-a)} + \frac{(x-a)(x-b)(b-a)}{(c-a)(c-b)(b-a)}$$

$=$

$$= \frac{(x-b)(x-c)(c-b)}{(b-a)(c-a)(c-b)} - \frac{(x-a)(x-c)(c-a)}{(b-a)(c-b)(c-a)} + \frac{(x-a)(x-b)(b-a)}{(c-a)(c-b)(b-a)} =$$

$$= \frac{(x-b)(x-c)(c-b)-(x-a)(x-c)(c-a)+(x-a)(x-b)(b-a)}{(c-a)(c-b)(b-a)} =$$

$$=$$

$$\frac{[x^2-(b+c)x+bc](c-b)-[x^2-(a+c)x+ac](c-a)+[x^2-(a+b)x+ab](b-a)}{(c-a)(c-b)(b-a)}$$

$$\frac{x^2[(c-b)-(c-a)+(b-a)]-x[(b+c)(c-b)-(a+c)(c-a)+(a+b)(b-a)]+[bc(c-b)-ac(c}{(c-a)(c-b)(b-a)}$$

$$=$$

$$\frac{x^2(c-b-c+a+b-a)-x(c^2-b^2-c^2+a^2+b^2-a^2)+(bc^2-b^2c-ac^2+a^2c+ab^2-a^2b)}{(c-a)(c-b)(b-a)}$$

$$=$$

$$= \frac{(bc^2-b^2c-ac^2+a^2c+ab^2-a^2b)}{(c-a)(c-b)(b-a)} = \frac{(bc^2-b^2c-ac^2+a^2c+ab^2-a^2b)}{(c^2-bc-ac+ab)(b-a)} =$$

$$\frac{(bc^2-b^2c-ac^2+a^2c+ab^2-a^2b)}{(bc^2-b^2c-abc+ab^2-ac^2+abc+a^2c-a^2b)} =$$

$$\frac{(bc^2-b^2c-ac^2+a^2c+ab^2-a^2b)}{(bc^2-b^2c+ab^2-ac^2+a^2c-a^2b)} = 1$$

Assim definimos *Q(x)* da seguinte forma: *Q(x)* = $\frac{a^2}{P'(a)} + \frac{b^2}{P'(b)} + \frac{c^2}{P'(c)} = \sum_{\alpha \in \{a,b,c\}} \frac{\alpha^2}{P'(\alpha)}$ = 1

Logo não é um polinômio do segundo grau, é um polinômio de grau zero. E não vale 1 em cada uma das raízes de *P*, o seu somatório é que dá 1.

(e) (V)

Dados dois pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1) distintos, com coordenadas reais, a partir da estrutura da função de grau 1: $y = a_1 x + a_0$ e destes dois pontos poderemos obter os coeficientes a_1, a_0 com a solução do sistema linear abaixo, façamos:

$$\begin{cases} y_0 = a_1 x_0 + a_0 \\ y_1 = a_1 x_1 + a_0 \end{cases}$$

Assim teremos uma única função do primeiro grau com coeficientes a_1, a_0 determinados na solução do sistema linear acima, que passa por estes pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1).

(f) (V)

Dados três pontos $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ e (x_2, y_2) distintos, com coordenadas reais, então a partir da estrutura da função de grau 2: $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$ e destes três pontos poderemos obter os coeficientes a_2, a_1, a_0 com a solução do sistema linear abaixo, façamos:

$$\begin{cases} y_0 = a_2x_0^2 + a_1x_0 + a_0 \\ y_1 = a_2x_1^2 + a_1x_1 + a_0 \\ y_2 = a_2x_2^2 + a_1x_2 + a_0 \end{cases}$$

Logo teremos uma única função do segundo grau com coeficientes a_2, a_1, a_0 determinados na solução do sistema linear acima, que passa por estes pontos $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ e (x_2, y_2).

(g) (V)

Dados n pontos $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ ... (x_{n-1}, y_{n-1}) distintos, com coordenadas reais, então a partir da estrutura da função de grau n − 1: $y = a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ e destes n pontos poderemos obter os coeficientes $a_n, \ldots, a_1, a_0$ com a solução do sistema linear abaixo, façamos:

$$\begin{cases} y_0 = a_{n-1}x_0^{n-1} + \cdots + a_1x_0 + a_0 \\ y_1 = a_{n-1}x_1^{n-1} + \cdots + a_1x_1 + a_0 \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ y_{n-1} = a_{n-1}x_{n-1}^{n-1} + \cdots + a_1x_{n-1} + a_0 \end{cases}$$

Logo teremos uma única função do grau n – 1 com coeficientes $a_n, \ldots, a_1, a_0$ determinados na solução do sistema linear acima, que passa por estes pontos $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ ... (x_{n-1}, y_{n-1}).

(h) (V)

Devemos ter em mente as seguintes observações antes de tudo:

- Num polinômio de grau 2, temos o gráfico de uma parábola, onde no máximo podemos encontrar dois valores x_0, x_1, tais que $P(x_0) = P(x_1)$;

- Num polinômio de grau 3, temos o gráfico onde no máximo podemos encontrar três valores x_0, x_1, x_2 , tais que $P(x_0) = P(x_1) = P(x_2)$;

A partir daí podemos escrever:

- Num polinômio de grau n, temos o gráfico onde no máximo podemos encontrar *n* valores $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, tais que $P(x_0) = P(x_1) = \ldots = P(x_{n-1})$;

Se temos um polinômio de grau menor ou igual n − 1:

$$P(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

E sabemos que $P(b_n) = \ldots = P(b_2) = P(b_1) = b$ *para* $b_n \neq \ldots \neq b_2 \neq b_1$, é constante então temos necessariamente $P(x) = b$, um polinômio constante. Façamos:

$$\begin{cases} b = a_{n-1}x_0^{n-1} + \cdots + a_1 x_0^1 + a_0 x_0^0 \\ b = a_{n-1}x_1^{n-1} + \cdots + a_1 x_1^1 + a_0 x_1^0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b = a_{n-1}x_n^{n-1} + \cdots + a_1 x_n^1 + a_0 x_n^0 \end{cases}$$

$b=$
$$(a_{n-1}x_0^{\;n-1} + \ldots + a_1 x_0^{\;1} + a_0 x_0^{\;0}) = (a_{n-1}x_1^{\;n-1} + \ldots + a_1 x_1^{\;1} + a_0 x_1^{\;1}) = \ldots = (a_{n-1}x_n^{\;n-1} + \ldots + a_1 x_n^{\;1} +$$

$$\left\langle (a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0), (x_0^{\;n-1}, x_0^{\;1}, \ldots, x_0^{\;0}) \right\rangle = \left\langle (a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0), (b_1^{\;n-1}, b_1^{\;1}, \ldots, b_1^{\;0}) \right\rangle = .. = \left\langle (a_{n-1}, \ldots,\right.$$

$$\left\langle A, B_0 \right\rangle = \left\langle A, B_1 \right\rangle = \ldots = \left\langle A, B_n \right\rangle$$

Concluímos então que: $B_0 = B_1 = \ldots = B_n$ então:

$$b_0^{\;n-1} = b_1^{\;n-1} = \ldots = b_n^{\;n-1}, \quad \ldots \quad , \quad b_0^{\;1} = b_1^{\;1} = \ldots = b_n^{\;1},$$
$$b_0^{\;0} = b_1^{\;0} = \ldots = b_n^{\;0}$$

As expressões acima afirmam que: $b_0 = b_1 = \ldots = b_n$ o que não é verdade, pois vimos acima que $b_n \neq \ldots \neq b_2 \neq b_1$. Assim para que $\left\langle A, B_0 \right\rangle = \left\langle A, B_1 \right\rangle = \ldots = \left\langle A, B_n \right\rangle$ sejam verdade é preciso que $A = (0, \ldots, 0, a_0)$ restando $b = \left\langle A, B_0 \right\rangle = \left\langle A, B_1 \right\rangle = \ldots = \left\langle A, B_n \right\rangle = a_0$.

Logo podemos afirmar que $P(x) = a_0$, um polinômio constante e de grau zero.

(i) (V)

Dados $a < b < c$ e se

$$P(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$$

Defina Q(x) = $\sum_{\alpha \in \{a,b,c\}} \frac{P_\alpha(x)}{P'(\alpha)}$. Então Q é constante igual a 1.

Notação: $P_a(x) = \frac{P(x)}{x - a}$

Analisando o que vimos anteriormente, o polinômio $Q(x)$ é constante e igual a 1.

Vejamos:

Temos que:

$$P_a(x) = \frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{x-a} = (x-b)(x-c)$$

$$P_b(x) = \frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{x-b} = (x-a)(x-c)$$

$$P_c(x) = \frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{x-c} = (x-a)(x-b)$$

Logo:

$P'(x) = (x - b)(x - c) + (x - a)(x - c) + (x - a)(x - b)$

$P'(a) = (a - b)(a - c) + (a - a)(a - c) + (a - a)(a - b) = (a - b)(a - c)$

$P'(b) = (b - b)(b - c) + (b - a)(b - c) + (b - a)(b - b) = (b - a)(b - c)$

$P'(c) = (c - b)(c - c) + (c - a)(c - c) + (c - a)(c - b) = (c - a)(c - b)$

$$Q(x) = \sum_{\alpha \in \{a,b,c\}} \frac{P_\alpha(x)}{P'(\alpha)} = \frac{P_a(x)}{P'(a)} + \frac{P_b(x)}{P'(b)} + \frac{P_c(x)}{P'(c)} =$$

$$\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = =$$

$$\frac{(x-b)(x-c)(c-b)}{[(-1)(b-a)][(-1)(c-a)](c-b)} + \frac{(x-a)(x-c)(c-a)}{(b-a)[(-1)(c-b)](c-a)} + \frac{(x-a)(x-b)(b-a)}{(c-a)(c-b)(b-a)}$$

$$=$$

$$= \frac{(x-b)(x-c)(c-b)}{(b-a)(c-a)(c-b)} - \frac{(x-a)(x-c)(c-a)}{(b-a)(c-b)(c-a)} + \frac{(x-a)(x-b)(b-a)}{(c-a)(c-b)(b-a)} =$$

$$= \frac{(x-b)(x-c)(c-b) - (x-a)(x-c)(c-a) + (x-a)(x-b)(b-a)}{(c-a)(c-b)(b-a)} =$$

$$=$$

$$\frac{[x^2 - (b+c)x + bc](c-b) - [x^2 - (a+c)x + ac](c-a) + [x^2 - (a+b)x + ab](b-a)}{(c-a)(c-b)(b-a)}$$

$$=$$

$$=$$

$$\frac{x^2[(c-b)-(c-a)+(b-a)]-x[(b+c)(c-b)-(a+c)(c-a)+(a+b)(b-a)]+[bc(c-b)-ac(c}{(c-a)(c-b)(b-a)}$$

$$=$$

$$=$$

$$\frac{x^2(c-b-c+a+b-a)-x(c^2-b^2-c^2+a^2+b^2-a^2)+(bc^2-b^2c-ac^2+a^2c+ab^2-a^2b)}{(c-a)(c-b)(b-a)}$$

$$=$$

$$= \frac{(bc^2-b^2c-ac^2+a^2c+ab^2-a^2b)}{(c-a)(c-b)(b-a)} = \frac{(bc^2-b^2c-ac^2+a^2c+ab^2-a^2b)}{(c^2-bc-ac+ab)(b-a)} =$$

$$= \frac{(bc^2-b^2c-ac^2+a^2c+ab^2-a^2b)}{(bc^2-b^2c-abc+ab^2-ac^2+abc+a^2c-a^2b)} =$$

$$\frac{(bc^2-b^2c-ac^2+a^2c+ab^2-a^2b)}{(bc^2-b^2c+ab^2-ac^2+a^2c-a^2b)} = 1$$

Assim definimos $Q(x)$ como: Q(x) = $\dfrac{a^2}{P'(a)}+\dfrac{b^2}{P'(b)}+\dfrac{c^2}{P'(c)} = \displaystyle\sum_{\alpha\in\{a,b,c\}}\frac{\alpha^2}{P'(\alpha)} = 1$

(j) (V)

Polinômio de Lagrange

Dados $a < b < c$ e se

$$P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$$

Considere uma função $h:\alpha \in \{a,b,c\} \quad h(\alpha)\in \Re$

Quer dizer que os números $h(a), h(b), h(c)$ são dados.

Defina

$$Q(x) = \sum_{\alpha\in\{a,b,c\}} \frac{h(\alpha)P_\alpha(x)}{P'(\alpha)}\,.$$

então $Q(\alpha) = h(\alpha)$. Logo Q é um polinômio de grau 2 passa nos pontos

$$(a, h(a)),\ (b, h(b)),\ (c, h(c))$$

Em outras palavras, Q é um polinômio de grau 2 interpolando os pontos

$$(a, h(a)),\ (b, h(b)),\ (c, h(c))$$

Notação: $P_a = \dfrac{P(x)}{x-a}$

Definamos $Q(x)$:

Temos que:

$$P_a(x) = \frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{x-a} = (x-b)(x-c)$$

$$P_b(x) = \frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{x-b} = (x-a)(x-c)$$

$$P_c(x) = \frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{x-c} = (x-a)(x-b)$$

Então:

P'(x) = (x − b)(x − c) + (x − a)(x − c) + (x − a)(x − b)

P'(a) = (a − b)(a − c) + (a − a)(a − c) + (a − a)(a − b) = (a − b)(a − c)

P'(b) = (b − b)(b − c) + (b − a)(b − c) + (b − a)(b − b) = (b − a)(b − c)

P'(c) = (c − b)(c − c) + (c − a)(c − c) + (c − a)(c − b) = (c − a)(c − b)

$$Q(x) = \sum_{\alpha\in\{a,b,c\}} \frac{h(\alpha)P_\alpha(x)}{P'(\alpha)} = \frac{h(a)P_a(x)}{P'(a)} + \frac{h(b)P_b(x)}{P'(b)} + \frac{h(c)P_c(x)}{P'(c)} = =$$

$$h(a)\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + h(b)\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + h(c)\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = =$$

$$\frac{h(a)(x-b)(x-c)(c-b)}{[(-1)(b-a)][(-1)(c-a)](c-b)} + \frac{h(b)(x-a)(x-c)(c-a)}{(b-a)[(-1)(c-b)](c-a)} + \frac{h(c)(x-a)(x-b)(b-}{(c-a)(c-b)(b-a)}$$

$$=$$

$$\frac{h(a)(x-b)(x-c)(c-b)}{(b-a)(c-a)(c-b)} - \frac{h(b)(x-a)(x-c)(c-a)}{(b-a)(c-b)(c-a)} + \frac{h(c)(x-a)(x-b)(b-a)}{(c-a)(c-b)(b-a)}$$

$$=$$

$$\frac{h(a)(x-b)(x-c)(c-b) - h(b)(x-a)(x-c)(c-a) + h(c)(x-a)(x-b)(b-a)}{(c-a)(c-b)(b-a)}$$

$$=$$

$$\frac{[x^2-(b+c)x+bc][h(a)(c-b)] - [x^2-(a+c)x+ac][h(b)(c-a)] + [x^2-(a+b)x+ab]}{(c-a)(c-b)(b-a)}$$

$$=$$

$$\frac{x^2[h(a)(c-b)-h(b)(c-a)+h(c)(b-a)]}{(c-a)(c-b)(b-a)}$$

$$-\frac{x[(b+c)h(a)(c-b)-(a+c)h(b)(c-a)+(a+b)h(c)(b-a)]}{(c-a)(c-b)(b-a)}+$$

$$+\frac{[bc.h(a)(c-b)-ac.h(b)(c-a)+ab.h(c)(b-a)]}{(c-a)(c-b)(b-a)}$$

$$=x^2\left[\frac{h(a)}{(c-a)(b-a)}-\frac{h(b)}{(c-b)(b-a)}+\frac{h(c)}{(c-a)(c-b)}\right]$$

$$-x\left[\frac{h(a)(c^2-b^2)-h(b)(c^2-a^2)+h(c)(b^2-a^2)}{(c-a)(c-b)(b-a)}\right]+$$

$$+\left[\frac{bc.h(a)(c-b)-ac.h(b)(c-a)+ab.h(c)(b-a)}{(c-a)(c-b)(b-a)}\right]$$

Como podemos perceber, não temos como fazer simplificações nos coeficientes de $Q(x)$, que provavelmente serão diferentes de zero. Com isso podemos concluir que $Q(x)$ é um polinômio de grau 2.

E como

$$Q(x)=\sum_{\alpha\in\{a,b,c\}}\frac{h(\alpha)P_\alpha(x)}{P'(\alpha)}=$$

$$h(a)\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+h(b)\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+h(c)\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$$

Podemos perceber que *Q(a) = h(a), Q(b) = h(b)* e *Q(c) = h(c)* e, portanto passa nos pontos:

(a, h(a)), (b, h(b)), (c, h(c))

Assim $Q(x)$ é um polinômio do segundo grau interpolando os pontos acima.

03. Polinômio passando por *n* pontos

(a) (V)

Se $(a_i)_{i=1,\ldots,n}$ for uma sucessão estritamente crescente de números reais e se

$$P(x) = (x - a_1) \cdot \ldots \cdot (x - a_n) = \prod_{i=1}^{n} (x - a_i)$$

Então $P'(a_i) \neq 0$ para todo $i = 0, \ldots, n$.

Se $P(x) = (x - a_1)\ldots(x - a_n) = (x - a_1).[(x - a_2)\ldots(x - a_n)]$

então

$P'(x) = 1.[(x - a_2)\ldots(x - a_n)] + (x - a_1) \,.\, D_1$

$D_1 = 1.[(x - a_3)\ldots(x - a_n)] + (x - a_2) \,.\, D_2$

$D_2 = 1.[(x - a_4)\ldots(x - a_n)] + (x - a_3) \,.\, D_3$

$\vdots$

$D_{n-2} = 1.[(x - a_{n-1}).(x - a_n)] + (x - a_{n-2}) \,.\, D_{n-1}$

$D_{n-1} = 1.(x - a_n) + (x - a_{n-1}) \,.\, D_n$

$D_n = 1$

De outra maneira:

$$P'(x) = (x - a_2)\ldots(x - a_{n-1}).(x - a_n) + (x - a_1).(x - a_3)\ldots(x - a_{n-1}).(x - a_n) + \ldots$$

$$+ \ldots +$$

$$\ldots + (x - a_1).(x - a_2)\ldots (x - a_{n-2}).(x - a_n) + (x - a_1).(x - a_2)\ldots(x - a_{n-1})$$

Logo, quando tivermos

$P'(a_1) = (a_1 - a_2)\ldots(a_1 - a_{n-1}).(a_1 - a_n) \neq 0$

$P'(a_2) = (a_2 - a_1).(a_2 - a_3)\ldots(a_2 - a_n) \neq 0$

$\vdots$

$P'(a_{n-1}) = (a_{n-1} - a_1)\ldots(a_{n-1} - a_{n-2}).(a_{n-1} - a_n) \neq 0$

$P'(a_n) = (a_n - a_1).(a_n - a_2)\ldots(a_n - a_{n-1}) \neq 0$

Teremos $P'(a_i) \neq 0$ para todo $i = 0, \ldots, n$.

(b) (V)

Considere $a < b < c$ e $P(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$ então $P'(x_0) \neq 0$ para todo $x_0 \in \{a, b, c\}$.

Se $P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$, então

$$P'(x) = (x-a)[(x-b)+(x-c)] + (x-b)(x-c)$$
$$P'(x) = (x-b)(x-c) + (x-a)(x-c) + (x-a)(x-b)$$

$P'(a) = (a-b)(a-c) + (a-a)(a-c) + (a-a)(a-b) = (a-b)(a-c) \neq 0$

$P'(b) = (b-b)(b-c) + (b-a)(b-c) + (b-a)(b-b) = (b-a)(b-c) \neq 0$

$P'(c) = (c-b)(c-c) + (c-a)(c-c) + (c-a)(c-b) = (c-a)(c-b) \neq 0$

(c) (F)

(d) (V)

Seja $(a_i)_{i=1,\dots,n}$ uma sucessão estritamente crescente de números reais e

$$P(x) = (x-a_1)\cdot\ldots\cdot(x-a_n) = \prod_{i=1}^{n}(x-a_i)$$

Notação: $P(x) = \dfrac{P(x)}{x-a_i}$ então $P'(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P_i(x)$

Temos:

$$P(x) = (x-a_1)\cdot\ldots\cdot(x-a_n) = \prod_{i=1}^{n}(x-a_i)$$

Do item (a), sabemos que :

$$P'(x) = (x-a_2)\ldots(x-a_{n-1}).(x-a_n) + (x-a_1).(x-a_3)\ldots(x-a_{n-1}).(x-a_n) + \ldots$$
$$+ \ldots +$$
$$\ldots + (x-a_1).(x-a_2)\ldots(x-a_{n-2}).(x-a_n) + (x-a_1).(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1})$$

Devemos mostrar que: $P'(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P_i(x) = \frac{(x-a_1)\cdot\ldots\cdot(x-a_n)}{x-a_1} + \frac{(x-a_1)(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_n)}{x-a_2} + \ldots + \frac{(x-a_1)\cdot\ldots\cdot(x-a_{n-1})(x-a_n)}{x-a_{n-1}} + \frac{(x-a_1)\cdot\ldots\cdot(x-a_n)}{x-a_n} = (x-a_2)\ldots(x-a_{n-1}).(x-a_n) +$

$+ (x-a_1).(x-a_3)\ldots(x-a_n) + \ldots + (x-a_1).(x-a_2)\ldots(x-a_{n-2}).(x-a_n) + (x-a_1).(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1})$

Chegamos dessa forma à derivada de $P(x)$, confirmando assim o item (a). Podemos dizer que:

$$P'(x) = \sum_{i=1}^{n} P_i(x) \cdot$$

(e) (V)

Seja $(a_i)_{i=1,\ldots,n}$ uma sucessão estritamente crescente de números reais e

$$P(x) = (x - a_1) \cdot \ldots \cdot (x - a_n) = \prod_{i=1}^{n} (x - a_i)$$

Com a Notação: $P_i(x) = \dfrac{P(x)}{x - a_i}$

O grau de $Q(x) = \sum_{i=1}^{n} P_i(x)$ é n − 1.

De maneira lógica podemos deduzir que o grau de $Q(x)$ é *n − 1.*

Analisemos: $P(x)$ é um polinômio de grau *n*. Se $Q(x)$ é um polinômio formado pela soma de polinômios $P_i(x)$ que são de grau *n − 1* então podemos concluir que $Q(x)$ é de grau *n − 1*.

(f) (F)

Seja $(a_i)_{i=1,\ldots,n}$ uma sucessão estritamente crescente de números reais e

$$P(x) = (x - a_1) \cdot \ldots \cdot (x - a_n) = \prod_{i=1}^{n} (x - a_i)$$

Com a Notação: $P_i(x) = \dfrac{P(x)}{x - a_i}$

Defina $Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{P_i(x)}{P'(a_i)}$ então Q é um polinômio de grau *n - 1* que vale 1 em cada uma das raízes de P.

Definamos $Q(x) =$

Temos que:

$$P_1(x) = \frac{(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_{n-1})(x - a_n)}{x - a_1} = (x - a_2)\ldots(x - a_{n-1})(x - a_n)$$

$$P_2(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1})(x-a_n)}{x-a_2} = (x-a_1)(x-a_3)\ldots(x-a_n)$$

……………………………………………………………………………………

$$P_{n-1}(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1})(x-a_n)}{x-a_{n-1}} = (x-a_1)\ldots(x-a_{n-2})(x-a_n)$$

$$P_n(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1})(x-a_n)}{x-a_n} = (x-a_1)\ldots(x-a_{n-2})(x-a_{n-1})$$

Então:

$P'(a_1) = (a_1 - a_2)\ldots(a_1 - a_{n-1}).(a_1 - a_n) = (-1)^{n-1}.(a_2 - a_1)\ldots(a_{n-1} - a_1).(a_n - a_1)$

$P'(a_2) = (a_2 - a_1).(a_2 - a_3)\ldots(a_2 - a_n) = (-1)^{n-2}.(a_2 - a_1).(a_3 - a_2)\ldots(a_n - a_2)$

$\vdots$

$P'(a_{n-1}) = (a_{n-1} - a_1)\ldots(a_{n-1} - a_{n-2}).(a_{n-1} - a_n) = (-1)^1.(a_{n-1} - a_1)\ldots(a_{n-1} - a_{n-2}).(a_n - a_{n-1})$

$P'(a_n) = (-1)^0.(a_n - a_1).(a_n - a_2)\ldots(a_n - a_{n-1})$

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i(x)}{P'(a_i)} = \frac{P_1(x)}{P'(a_1)} + \frac{P_2(x)}{P'(a_2)} + \ldots + \frac{P_{n-1}(x)}{P'(a_{n-1})} + \frac{P_n(x)}{P'(a_n)}$$

$$=$$

$$(-1)^{n-1}\frac{(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1})(x-a_n)}{(a_2-a_1)\ldots(a_{n-1}-a_1)(a_n-a_1)} + (-1)^{n-2}\frac{(x-a_1)(x-a_3)\ldots(x-a_n)}{(a_2-a_1)(a_3-a_2)\ldots(a_n-a_2)} + \ldots +$$

$$+$$

$$\ldots + (-1)\frac{(x-a_1)\ldots(x-a_{n-2})(x-a_n)}{(a_{n-1}-a_1)\ldots(a_{n-1}-a_{n-2})(a_n-a_{n-1})} + \frac{(x-a_1)\ldots(x-a_{n-2})(x-a_{n-1})}{(a_n-a_1)\ldots(a_n-a_{n-2})(a_n-a_{n-1})}$$

O valor esperado para este somatório é 1. Podemos chegar a essa conclusão fazendo n assumir valores pequenos como 1, 2 ou 3.

(g) (V)

Se um polinômio Q tiver grau $n - 1$ assumir n vezes o mesmo valor, então Q é constante.

Pelo que fizemos no item (h) da questão 02, se tivermos $P(x)$ de grau $n - 1$, i valores de x, tal que $i > n - 1$, então teremos $P(x)$ constante. Mas agora temos:

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i(x)}{P'(a_i)} = 1,$$

que já sabemos pela questão anterior que é constante e igual a 1.

(h) (V)

Seja $(a_i)_{i=1,\ldots,n}$ uma sucessão estritamente crescente de números reais e

$$P(x) = (x - a_1) \cdot \ldots \cdot (x - a_n) = \prod_{i=1}^{n} (x - a_i)$$

Com a Notação: $P_i(x) = \dfrac{P(x)}{x - a_i}$

Defina $Q(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{P_i(x)}{P'(a_i)}$ então Q é constante igual a 1.

Definamos $Q(x)$:

Temos que:

$$P_1(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1})(x-a_n)}{x-a_1} = (x-a_2)\ldots(x-a_{n-1})(x-a_n)$$

$$P_2(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1})(x-a_n)}{x-a_2} = (x-a_1)(x-a_3)\ldots(x-a_n)$$

……………………………………………

$$P_{n-1}(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1})(x-a_n)}{x-a_{n-1}} = (x-a_1)\ldots(x-a_{n-2})(x-a_n)$$

$$P_n(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1})(x-a_n)}{x-a_n} = (x-a_1)\ldots(x-a_{n-2})(x-a_{n-1})$$

Então:

$P'(a_1) = (a_1 - a_2)\ldots(a_1 - a_{n-1}).(a_1 - a_n) = (-1)^{n-1}.(a_2 - a_1)\ldots(a_{n-1} - a_1).(a_n - a_1)$

$P'(a_2) = (a_2 - a_1).(a_2 - a_3)\ldots(a_2 - a_n) = (-1)^{n-2}.(a_2 - a_1).(a_3 - a_2)\ldots(a_n - a_2)$

⋮

$P'(a_{n-1}) = (a_{n-1} - a_1)...(a_{n-1} - a_{n-2}).(a_{n-1} - a_n) = (-1)^1.(a_{n-1} - a_1)...(a_{n-1} - a_{n-2}).(a_n - a_{n-1})$

$P'(a_n) = (-1)^0.(a_n - a_1).(a_n - a_2)...(a_n - a_{n-1})$

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i(x)}{P'(a_i)} = \frac{P_1(x)}{P'(a_1)} + \frac{P_2(x)}{P'(a_2)} + ... + \frac{P_{n-1}(x)}{P'(a_{n-1})} + \frac{P_n(x)}{P'(a_n)}$$

$$=$$

$$(-1)^{n-1} \frac{(x-a_2)...(x-a_{n-1})(x-a_n)}{(a_2-a_1)...(a_{n-1}-a_1)(a_n-a_1)} + (-1)^{n-2} \frac{(x-a_1)(x-a_3)...(x-a_n)}{(a_2-a_1)(a_3-a_2)...(a_n-a_2)} + ... +$$

$$+$$

$$... + (-1) \frac{(x-a_1)...(x-a_{n-2})(x-a_n)}{(a_{n-1}-a_1)...(a_{n-1}-a_{n-2})(a_n-a_{n-1})} + \frac{(x-a_1)...(x-a_{n-2})(x-a_{n-1})}{(a_n-a_1)...(a_n-a_{n-2})(a_n-a_{n-1})}$$

Como o somatório da questão (f), esperamos que esse também apresente como resultado 1. Podemos chegar a essa conclusão depois de fazer os cálculos fazendo *n* assumir valores como 1, 2 ou 3.

(i) (V)

Polinômio de Lagrange

Seja $(a_i)_{i=1,...,n}$ uma sucessão estritamente crescente de números reais e

$$P(x) = (x-a_1) \cdot ... \cdot (x-a_n) = \prod_{i=1}^{n} (x-a_i)$$

Considere a sucessão de números reais $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ e a função

$$h : \alpha \in \{a_1, a_2, ..., a_n\} \qquad h(\alpha) \in \Re$$

Quer dizer que os números h(a_1), h(a_2), ... , h(a_n) são dados.

Defina Q(x) = $\sum_{i=1}^{n} \frac{h(a_i)P_\alpha(x)}{P'(a_i)}$ então Q(a_i) = h(a_i). Logo *Q* é um polinômio de grau *n – 1* passa nos pontos

(a_1 , h(a_1)), (a_2 , h(a_2)), ... , (a_n , h(a_n))

Em outras palavras, *Q* é um polinômio de grau *n – 1* interpolando os pontos

(a_1 , h(a_1)), (a_2 , h(a_2)), ... , (a_n , h(a_n))

Com a Notação: $P_i(x) = \dfrac{P(x)}{x-a_i}$

Definamos $Q(x)$:

Temos que:

P_1(x) =

$$\frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1})(x-a_n)}{x-a_1} = (x-a_2)\ldots(x-a_{n-1})(x-a_n)$$

$$P_2(\text{x}) = \frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1})(x-a_n)}{x-a_2} = (x-a_1)(x-a_3)\ldots(x-a_n)$$

……………………………………………………

P_{n-1}(x)=

$$\frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1})(x-a_n)}{x-a_{n-1}} = (x-a_1)\ldots(x-a_{n-2})(x-a_n)$$

(P_n(x) =

$$\frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1})(x-a_n)}{x-a_n} = (x-a_1)\ldots(x-a_{n-2})(x-a_{n-1})$$

Então:

$P'(a_1) = (a_1 - a_2)\ldots(a_1 - a_{n-1}).(a_1 - a_n) = (-1)^{n-1}.(a_2 - a_1)\ldots(a_{n-1} - a_1).(a_n - a_1)$

$P'(a_2) = (a_2 - a_1).(a_2 - a_3)\ldots(a_2 - a_n) = (-1)^{n-2}.(a_2 - a_1).(a_3 - a_2)\ldots(a_n - a_2)$

$\vdots$

$P'(a_{n-1}) = (a_{n-1} - a_1)\ldots(a_{n-1} - a_{n-2}).(a_{n-1} - a_n) = (-1)^1.(a_{n-1} - a_1)\ldots(a_{n-1} - a_{n-2}).(a_n - a_{n-1})$

$P'(a_n) = (-1)^0.(a_n - a_1).(a_n - a_2)\ldots(a_n - a_{n-1})$

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{h(a_i)P_\alpha(x)}{P'(a_i)} = \frac{h(a_1).P_1(x)}{P'(a_1)} + \frac{h(a_2).P_2(x)}{P'(a_2)} + \ldots + \frac{h(a_{n-1}).P_{n-1}(x)}{P'(a_{n-1})} + \frac{h(a_n).P_n(x)}{P'(a_n)}$$

$$=$$

$$(-1)^{n-1}\frac{h(a_1).(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1})(x-a_n)}{(a_2-a_1)\ldots(a_{n-1}-a_1)(a_n-a_1)}+(-1)^{n-2}\frac{h(a_2).(x-a_1)(x-a_3)\ldots(x-a_n)}{(a_2-a_1)(a_3-a_2)\ldots(a_n-a_2)}+\ldots+$$

$$+$$

$$\ldots+(-1)\frac{h(a_{n-1}).(x-a_1)\ldots(x-a_{n-2})(x-a_n)}{(a_{n-1}-a_1)\ldots(a_{n-1}-a_{n-2})(a_n-a_{n-1})}+\frac{h(a_n).(x-a_1)\ldots(x-a_{n-2})(x-a_{n-1})}{(a_n-a_1)\ldots(a_n-a_{n-2})(a_n-a_{n-1})}$$

Com no item (j), da questão anterior, percebemos que não há como simplificar os coeficientes de $Q(x)$, que provavelmente serão diferentes de zero. Logo $Q(x)$ é um polinômio de grau *n – 1*.

Como

$$Q(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{h(a_i)P_\alpha(x)}{P'(a_i)} = h(a_1)\frac{.P_1(x)}{P'(a_1)} + h(a_2)\frac{P_2(x)}{P'(a_2)} + \ldots +$$

$$h(a_{n-1})\frac{P_{n-1}(x)}{P'(a_{n-1})} + h(a_n)\frac{P_n(x)}{P'(a_n)}$$

Podemos perceber que $Q(a_1) = h(a_1)$, $Q(a_2) = h(a_2)$, ... , $Q(a_n) = h(a_n)$ e, portanto passa nos pontos:

$$(a_1, h(a_1)), (a_2, h(a_2)), \ldots, (a_n, h(a_n))$$

Assim $Q(x)$ é um polinômio do grau *n – 1* interpolando os pontos acima.