Cálculo Númerico Computacional

Francisco Adriano Gomes Bezerra

02/11/08

Resumo

O presente texto corresponde as resoluções das questões da 2ª lista de cálculo numérico computacional propostas pelo Profº Tarcísio Praciano.

1 Resoluções das questões

Os critérios para todas as justificativas apresentadas para questões neste texto ou foram feitas na forma de enuciados apartir das definições sempre tomando como base o item anterior ou foram desenvolvidas diretamente por cálculos.

1.1 Polinômio de Taylor

1. Polinômio tangente:

   a): Seja (1) dado por $y = f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) = b + m(x-a)$ portanto podemos destacar $y = b + f'(a)(x-a)$ que representa a equação tangente no ponto (a, b), isto fica claro fazendo $b = f(x)$ e $m = f'(a)$. Portanto podemos concluir que o item é verdadeiro.

   b) e c): De a) e por definição de função derivável, temos que se f não for derivável em um ponto $(x = a)$, então não existirá reta tangente neste ponto, pois o gráfico é descontínuo no mesmo. Portanto pelos enuciados dos dois ítens podemos concluir que b) é falso e c) é verdadeiro.

   d) Verdadeiro, pois pelo resumo teórico temos que (1) é uma consequência direta de (2) o que nos permite ver a relação entre reta e polinômio tangente para um mesmo contexto.

e) e f): Pelo o que foi mostrado no resumo teórico temos que: Dado o polinômio $P(x) = a_0 + a_1(x - a)$ se impusermos o sistema de equações (2) obteremos um polinômio do 1º grau tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$, basta para isso fazermos $f(a) = a_0$ e $f'(a) = a_1$, o que nos permite equipara o formato de reta e polinômio. Portanto podemos concluir que e) é falso e f) é verdadeiro.

2. Gráficos com o Gnuplot: Supondo que $f(x) = (x - 3)(x + 2)$ e $f'(x) = (x - 3) + (x + 2)$ sejam respectivamente a função e sua derivada definidas no terminal do gnuplot num ponto $a = 2$. Portanto temos:

   a) e b) os comandos:

```
f(x) = (x-3)*(x+2)
df(x) = (x-3) + (x+2)
g(x)=f(a)+df(a)*(x-a) ; a = 2
plot f(x), g(x), 0
```

   definidos no terminal do gnuplot produz o gráfico da reta tangete ao gráfico de f no ponto $(2, f(2))$ e não produz erro. Portanto podemos concluir que a) é verdadeiro e b) é falso. Veja figura 1.

   c) verdadeiro, pois os comandos:

```
f(x) = (x-3)*(x+2)
df(x) = (x-3) + (x+2)
a = -3
g(x)=f(a)+df(a)*(x-a)
plot f(x), g(x), 0
a = -2
plot f(x), g(x), 0
a = 2
plot f(x), g(x), 0
```

   produzem os gráficos das retas tangentes ao gráfico de f nos pontos $(a, f(a))$ $a \in \{-3, -2, 2\}$, mas só da para ver o último. Veja figura 1 corresponde ao último gráfico.

   d) verdadeiro, pois os comandos:

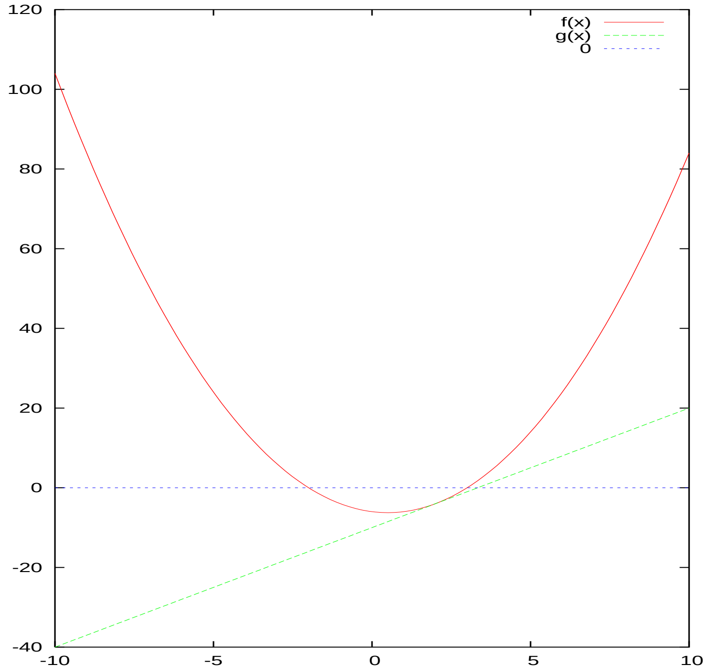

Figura 1: gráfico

```
f(x) = (x-3)*(x+2)
df(x) = (x-3) + (x+2)
a = -3
g(x)=f(a)+ df(a)*(x-a)
plot f(x), g(x), 0
pause -2
a = -2
plot f(x), g(x), 0
pause 2
a = 2
plot f(x), g(x), 0
```

produzem os gráficos das retas tangentes ao gráfico de f nos pontos $(a, f(a))$ $a \in \{-3, -2, 2\}$, e o comando (pause) permite ver os gráficos desde que os comandos sejam editados por exemplo no Word e em seguida copiados e colados no terminal do gnuplot.

3. Polinômio tangente do segundo grau:

Seja $P(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2$ a equação (11) do polinômio de

Taylor do 2º grau. Portanto temos:

a) e b): Fazendo $x = a$ obtemos:
$P(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 \Rightarrow P(a) = a_0$
$P'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) \Rightarrow P'(a) = a_1$
$P''(x) = 2a_2 \Rightarrow P''(a) = 2a_2$
Portanto podemos concluir que a) é verdadeiro e b) é falso.

c) e d): temos que a equação (11) é de um polinômio do 2º grau que passa num ponto (a, a_0) e com coeficiente angular a_1. Portanto podemos concluir que c) é falso a não ser que consideracimos $a_0 = b$ e d) é verdadeiro por a) e pelo que foi dito acima.

e) e f): seja f uma função derivável até a 2ª ordem de (11) temos que f e P possuem valores em comum para $x = a \Leftrightarrow P(x) = f(x) = a_0$, $P'(x) = f'(x) = a_1$ e $P''(x) = f''(x) = 2a_2$ portanto podemos concluir que o gráfico da parábola é tangente ao grafico de f em $(a, f(a))$ e consequentemente com a mesma curvatura. Portanto e) é falso e f) é verdadeiro.

g) e h): pelo que foi mostrado em { a) e b)} e { e) e f)} temos que $P(x) = f(x) = a_0$, $P'(x) = f'(x) = a_1$ e $P''(x) = f''(x) = 2a_2$ onde f e P possui valor em comum para $x = a$ e assim temos concavidades com mesmo sentido. Portanto podemos concluir que g) é verdadeiro e h) é falso (pelo fato da Eq. (13) estar errada).

i) e j): temos que o polinômio do 2º grau tangente ao gráfico de uma função f derivável até a 2ª ordem num ponto $(a, f(a))$ é dada por:
$P(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2$ para $P(a) = f(a) = a_0$, $P'(a) = f'(a) = a_1$ e $P''(a) = f''(a) = 2a_2 \Rightarrow P(x) = f(a) + f(a)'(x-a) + \dfrac{f''(x)}{2}(x-a)^2$. Portanto concluimos que i) é falso e j) é verdadeiro.

4. <u>Gráficos com o Gnuplot</u>: Supondo que $f(x) = x^3 + 2x^2 + 1$, $f'(x) = 3x^2 + 4x$ e $f''(x) = 6x+4$, sejam respectivamente a função, sua derivada 1ª e sua derivada 2ª definidas no terminal do gnuplot num ponto $a = 2$. Portanto temos:

   a) e b): os comandos:

```
f(x) = x**3+2*x**2+1
```

```
df(x) = 3*x**2+4*x
ddf(x) = 6*x+4
g(x)=f(a)+df(a)*(x-a) + 0.5*ddf(a)*(x-2)**2 ; a=2
plot f(x), g(x), 0
```

definidos no terminal do gnuplot produz o gráfico da parábola tangete ao gráfico de f no ponto $(2, f(2))$ e não produz erro. Portanto podemos concluir que a) é verdadeiro e b) é falso. Veja figura 2.

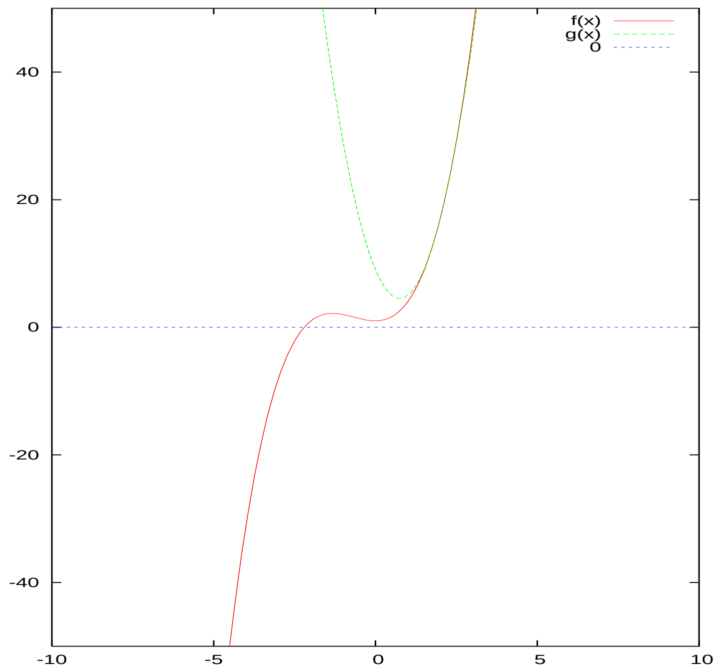

Figura 2: gráfico

c) verdadeiro, pois os comandos:

```
f(x) = x**3+2*x**2+1
df(x) = 3*x**2+4*x
ddf(x) = 6*x+4
g(x)=f(a)+df(a)*(x-a) + 0.5*ddf(a)*(x-a)**2
a=-3
plot f(x), g(x), 0
a = -2
plot f(x), g(x), 0
a = 2
```

```
plot f(x), g(x), 0
```

produzem os gráficos das parábolas tangentes ao gráfico de f nos pontos $(a, f(a))$ $a \in \{-3, -2, 2\}$, mas só da para ver o último. Veja figura 2 corresponde ao último gráfico.

d) verdadeiro, pois os comandos:

```
f(x) = x**3+2*x**2+1
df(x) = 3*x**2+4*x
ddf(x) = 6*x+4
g(x)=f(a)+df(a)*(x-a) + 0.5*ddf(a)*(x-a)**2
a=-3
plot f(x), g(x), 0
pause -2
a = -2
plot f(x), g(x), 0
pause -2
a = 2
plot f(x), g(x), 0
```

produzem os gráficos das parábolas tangentes ao gráfico de f nos pontos $(a, f(a))$ $a \in \{-3, -2, 2\}$, e o comando (pause) permite ver os gráficos desde que os comandos sejam editados por exemplo no Word e em seguida copiados e colados no terminal do gnuplot.

e): verdadeiro, pois teoricamente temos que a acoplagem de um módulo espacial por exemplo na estação espacial se dar por meio do polinômio de Taylor de ordem 2 (aproximação e precisão). Logicamente é necessário mais coisas!

5. <u>Laboratório - não será corrigida - empreendedorismo e inovação</u>:

6. <u>Teórica - polinômio do terceiro grau tangnte</u>: seja $P(x) = A + B(x-a) + C(x-a)^2 + D(x-a)^3$ o polinômio de Taylor até a 3ª ordem. Portanto:

a): é verdadeiro, pois por definição e seja f derivável até a ordem 3 e $P(x) = A + B(x-a) + C(x-a)^2 + D(x-a)^3$ o polinômio de Taylor até a 3ª ordem. Então $P(x) = f(x)$, $P'(x) = f'(x)$, $P''(x) = f''(x)$ e $P'''(x) = f'''(x)$ onde P é o melhor gráfico de terceiro grau tangente a f em volta de $x = a$.

b): é verdade, pois de a) temos que $P(x) = A+B(x-a)+C(x-a)^2+D(x-a)^3$ e fazendo $x = a$. Então:
$P(x) = A + B(x-a) + C(x-a)^2 + D(x-a)^3 \Rightarrow P(a) = f(a) = A$;
$P'(x) = B + 2C(x-a) + 3D(x-a)^2 \Rightarrow P'(a) = f'(a) = B$;
$P''(x) = 2C + 6D(x-a) \Rightarrow P''(a) = f''(a) = 2C$;
$P'''(x) = 6D \Rightarrow P'''(a) = f'''(a) = 6D$; (observar que estou consertando o erro de digitação $6C$).
concluimos que P é o melhor gráfico que se ajusta ao de f até a terceira derivação.

c) e d): de b) e fazendo as substituições adequadas podemos concluir que $P(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\dfrac{1}{2}f''(x-a)^2+\dfrac{1}{3!}f'''(a)(x-a)^3$ sendo assim a melhor equação do terceiro grau tangente ao gráfico de f três vezes continuamente diferenciável no ponto $(a, f(a))$. Então c) é falsa e d) é verdadeiro (estou consertanto o erro de digitação na falta da potência 2 no terceiro termo).

7. Aplicação fórmula de Taylor:
Seja f derivável até a ordem n. O polinômio $P(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dfrac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + ... + \dfrac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n$ denomina-se polinômio de Taylor de ordem n, de f em volta do ponto $(a, f(a))$. Portanto:

a) e b): pelo que foi estabelecido acima e seja $f(a) = sen(a)$ para $a = 0$, temos:

$$f(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2+\frac{1}{3!}f'''(a)(x-a)^3+\frac{1}{4!}f^{(4)}(a)(x-a)^4+\frac{1}{5!}f^{(5)}(a)(x-a)^5+\frac{1}{6!}f^{(6)}(a)(x-a)^6+\frac{1}{7!}f^{(7)}(a)(x-a)^7$$

$$f(x) = sen(a)+cos(a)(x-a)-\frac{1}{2!}sen(a)(x-a)^2-\frac{1}{3!}cos(a)(x-a)^3+\frac{1}{4!}sen(a)(x-a)^4+\frac{1}{5!}cos(a)(x-a)^5-\frac{1}{6!}sen(a)(x-a)^6-\frac{1}{7!}cos(a)(x-a)^7$$

$f(x) = sen(0)+cos(0)(x-0)-\frac{1}{2!}sen(0)(x-0)^2-\frac{1}{3!}cos(0)(x-0)^3+\frac{1}{4!}sen(0)(x-0)^4+\frac{1}{5!}cos(0)(x-0)^5-\frac{1}{6!}sen(0)(x-0)^6-\frac{1}{7!}cos(0)(x-0)^7$

$f(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7$

podemos concluir que a) é verdadeira e b) é falsa.

c) e d): pelo que foi estabelecido acima e seja $g(a) = cos(a)$ para $a = 0$, temos:

$g(x) = g(a) + g'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}g''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{3!}g'''(a)(x-a)^3 + \frac{1}{4!}g^{(4)}(a)(x-a)^4 + \frac{1}{5!}g^{(5)}(a)(x-a)^5 + \frac{1}{6!}g^{(6)}(a)(x-a)^6 + \frac{1}{7!}g^{(7)}(a)(x-a)^7 + \frac{1}{8!}g^{(8)}(a)(x-a)^8$

$g(x) = cos(a)-sen(a)(x-a)-\frac{1}{2!}cos(a)(x-a)^2+\frac{1}{3!}sen(a)(x-a)^3+\frac{1}{4!}cos(a)(x-a)^4-\frac{1}{5!}sen(a)(x-a)^5-\frac{1}{6!}cos(a)(x-a)^6+\frac{1}{7!}sen(a)(x-a)^7+\frac{1}{8!}cos(a)(x-a)^8$

$g(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8$

podemos concluir que c) é verdadeira e d) é falsa. A diferença de grau entre este item e o anterior se deve em ambos os casos por termos $sen(0) = 0$ o que anula os termos. No primeiro caso quando consideramos a função sen(a) todos os termos com grau pares desapareceram e no segundo caso ao consideramos a função cos(a) todos os termos com grau impares desapareceram.

8. Aplicações:

(a) devemos calcular $sin(0,1)$ de 7.a) temos:
$f(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7$, fazendo $x = 0,1$
$P(0,1) = 0,1 - \frac{1}{3!}(0,1)^3 + \frac{1}{5!}(0,1)^5 - \frac{1}{7!}(0,1)^7$ fazendo os cálculos obtemos:
$P(0,1) \approx 0,0998334166468253968$
pela calculadora $sin(0,1) = 0,0998334166468281523$. Portanto o erro é de aproximadamente $2,75549982137190952.10^{-15}$.

(b) devemos calcular $cos(0,1)$ de 7.c) temos:
$g(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8$ fazendo $x = 0,1$
$P(0,1) = 1 - \frac{1}{2!}(0,1)^2 + \frac{1}{4!}(0,1)^4 - \frac{1}{6!}(0,1)^6 + \frac{1}{8!}(0,1)^8$ fazendo os cálculos obtemos: $P(0,1) \approx 0,995004165278025794$
pela calculadora $cos(0,1) = 0,995004165278025766$. Portanto o erro é de aproximadamente $2,79724160501260144.10^{-17}$.

9. A exponencial:
Seja $F(x) = g(x) + if(x)$ definida por 7.a) e 7.b), onde i é a unidade imaginária. Portanto temos:

a) seja: $f(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 \Rightarrow f'(x) = 1 - 3\frac{1}{3!}x^2 + 5\frac{1}{5!}x^4 - 7\frac{1}{7!}x^6 = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 \neq g(x)$. Portanto falso.

b) verdadeiro, pois se usassemos um desenvolvimento de grau 9 para definir f então $f' = g$. veja:
supondo: $f(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 \Rightarrow f'(x) = 1 - 3\frac{1}{3!}x^2 + 5\frac{1}{5!}x^4 - 7\frac{1}{7!}x^6 + 9\frac{1}{9!}x^8 = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 = g(x)$.

c) seja: $g(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 \Rightarrow g'(x) = -2\frac{1}{2!}x + 4\frac{1}{4!}x^3 - 6\frac{1}{6!}x^5 + 8\frac{1}{8!}x^7 = -x + \frac{1}{3!}x^3 - \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{7!}x^7 = -f$. Portanto verdadeiro.

d) é verdadeiro, pois pela derivada da soma temos que: $F(x) = g(x) + if(x) \Rightarrow F'(x) = g'(x) + if'(x)$

e) e f) por a), b) e c) temos: $F'(x) = i(-ig'(x) + f'(x)) = i(if(x) + g(x)) = iF(x)$ se, e somente se, desenvolvesemos f até o grau 9. Portanto e) é falso e f) é verdadeiro.

g) e h) temos: $F(x) = e^{ix} = cos(x) + isin(x)$. Para $F(x) = e^{ix} \Rightarrow F'(x) = ie^{ix} = iF(x)$ e para $F(x) = cos(x) + isin(x) \Rightarrow F'(x) = -sin(x) + icos(x) = i^2 sin(x) + icos(x) = i(cos(x) + isin(x)) = iF(x)$. Portanto tal relação conhecida como fórmula de Euler e verdadeira em g) e falsa em h).

10. Derivadas Parciais:

Seja f uma função de duas variáveis diferenciável no ponto (x_0, y_0). Então a equação do plano tangente no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ é:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Portanto concluimos pelo que foi definido acima que:

a) é vedadeiro, pois o plano tangente no ponto (a, b, c) é:

$$z = f(x, y) = c + A(x - a) + B(y - b) \qquad (17)$$

b) é vedadeiro, pois de a) e fazendo $A = \dfrac{\partial f}{\partial x}$

c) é vedadeiro, pois de a) e fazendo $B = \dfrac{\partial f}{\partial y}$

Usando a notação da equação (17) se $z = g(x, y)$ tiver derivadas parciais $A = \dfrac{\partial g}{\partial x}$ e $B = \dfrac{\partial g}{\partial y}$ no ponto (a, b) então:

d) é falso, pois para notação em (17) deveriamos ter a equação $z = g(x, y) = c + A(x - a) + B(y - b)$ como plano tangente ao gráfico g no ponto (a, b, c) e não $f(x, y) = c + A(x - a) + B(y - b)$.

e) é falso, pois deveriamos ter a equação $z = g(x, y) = c + A(x - a) + B(y - b)$ como plano tangente ao gráfico g no ponto (a, b, c) e não $f(x, y) = g(a, b) + A(x - a) + B(y - b)$.

f) é verdadeiro, pois o plano $f(x, y) = c + A(x - a) + B(y - b)$ é paralelo ao plano $g(x, y) = c + A(x - a) + B(y - b)$ no ponto (a, b, c). O paralelismo se verifica pelos vetores normais aos dois serem iguais, ou seja $\overrightarrow{n_f} \times \overrightarrow{n_g} = \overrightarrow{0}$.

g) Pelo que foi estabelecido acima temos:
$z = g(a, b) + A(x - a) + B(y - b) \Rightarrow z = g(a, b) + \dfrac{\partial g}{\partial x}(a, b)(x - a) + \dfrac{\partial g}{\partial y}(a, b)(y - b)$
escrevendo em forma de produto escalar vem:
$(\dfrac{\partial g}{\partial y}, \dfrac{\partial g}{\partial x}, -1).[(x, y, z) - (a, b, g(a, b))]$. Portanto $(A, B, -1) = (\dfrac{\partial g}{\partial y}, \dfrac{\partial g}{\partial x}, -1)$ é

o vetor normal ao $\nabla g(x,y)$ no ponto $(a,b,g(a,b))$. Concluimos que o item é verdadeiro.

h) é verdadeiro por definição de reta tangente em $(\Re \longrightarrow \Re)$ e plano tangente em $(\Re^n \longrightarrow \Re)$.

11. Derivadas Parciais:

sabendo que as derivadas de $z = F(x,y)$ derivável no ponto $(1,2)$ são $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 2$; $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 3$ e $F(1,2) = -5$. Supondo F diferenciável. Portanto temos:
A equação do plano tangente no ponto $(1,2,F(1,2))$ é

$$z = F(x,y) = -5 + 2(x-1) + 3(y-2)$$

Portanto a) é falso; b) é verdadeiro e c) é falso.

d) é verdadeiro, pois na verdade G ou é paralelo ou coincide com F no ponto $(1,2,F(1,2))$.

Referências

[1] FONTENELE, F. C. F. GNUPLOT: comandos básicos e aplicações em sala de aula. Monografia do Curso de Matemática, 2007.

[2] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. Um Curso de Cálculo - Vol. 1 e 2 - 5ª edição - Editora LTC - São Paulo, 2007.