

Cálculo Numérico Computacional **Lista no. 06**
 Aproximação polinomial `tarcisio@member.ams.org`
 T. Praciano-Pereira **Dep. de Matemática**

alun@:

Univ. Estadual Vale do Acaraú 14 de agosto de 2008
 Documento processado com L^AT_EX sis. op. Debian/Gnu/Linux

1 Informações

Por favor, se você usar o método medieval para entrega desta lista, em papel, prenda esta *folha de rosto* na solução, preenchendo-a com seus dados.

Se você quiser entregar o trabalho eletronicamente, use o meu endereço eletrônico, ou entregue em CD na secretaria do Curso de Matemática. Arquivo preferencialmente em pdf

Procure o link “entrega de trabalhos”. [Siga as instruções](#) sobre nomes de arquivos:

`cnum_seu_email_XX.pdf`

XX é 06 para esta lista, e pdf é o tipo de formatação que você der ao seu trabalho. Você pode obter o formato pdf a partir de um documento escrito em open office ou como resultado da compilação de L^AT_EX .

Data de entrega: 30 de Agosto de 2008

Se o trabalho for feito em equipe, *cada aluno deve entregar o seu porque a entrega do trabalho é o registro de sua frequência*, quem **não entregar** o trabalho na data certa terá *falta* na semana e perderá o percentual da nota básica 5 da avaliação correspondente.

2 Tutorial sobre aproximação polinomial

objetivo: Vou começar a apresentar-lhe a aproximação polinomial, começando com *aproximação polinomial clássica* a histórica. Leia mais a respeito nas minhas notas de aula, no capítulo 4. Ou faça uma busca na wikipedia usando as palavras chaves.

Você vai ser conduzido a fazer experimentos com `gnuplot` e `calc` para entender os métodos polinomiais de aproximação.

Observe que você vai entender os tópicos na medida em que você execute os experimentos. Ler, apenas, de nada adiantará.

palavras chave: Aproximação polinomial, interpolação polinomial, polinômio de Lagrange, aproximação de dados discretos, suporte de uma função, núcleo de interpolação, precisão da malha, pontos de precisão.

3 Exercícios

Exercícios 1 *Tutorial sobre polinômio de Lagrange*

Estes exercícios vão conduzi-lo a entender o que é um polinômio de interpolação de Lagrange. Os exercícios marcados com asterisco podem ser ignorados, porque não serão usados em nenhum local do livro.

1. derivada algoritmica *Considere*

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \quad (1)$$

Verifique que

$$P'(x) = (x - x_1)(x - x_2) + (x - x_1)(x - x_3) + (x - x_2)(x - x_3) = (2)$$

$$P'(x) = P_1(x) + P_2(x) + P_3(x) \quad (3)$$

em que (**notação**)

$$P_1(x) = \frac{P(x)}{x - x_1}; P_2(x) = \frac{P(x)}{x - x_2}; P_3(x) = \frac{P(x)}{x - x_3} \quad (4)$$

Solução 1 Usando a derivada do produto: $(uv)' = u'v + uv'$ que pode ser usada com um produto de qualquer quantidade termos, e observando que a derivada de que cada fator é 1, temos

$$P'(x) = (x - x_2)(x - x_3) + (x - x_1)(x - x_3) + (x - x_1)(x - x_2)$$

uma soma de produtos em que, sucessivamente, cada um dos fatores originais foi eliminado (trocado por 1). É razoável designarmos

$$P_1(x) = (x - x_2)(x - x_3) = \frac{P(x)}{x - x_1}; \quad (5)$$

$$P_2(x) = (x - x_1)(x - x_3) = \frac{P(x)}{x - x_2}; \quad (6)$$

$$P_3(x) = (x - x_1)(x - x_2) = \frac{P(x)}{x - x_3} \quad (7)$$

e desta forma

$$P'(x) = P_1(x) + P_2(x) + P_3(x) \quad (8)$$

em que P_k é o polinômio sem o fator $(x - x_k)$ ou ainda é o quociente $\frac{P(x)}{x - x_k}$.

Vamos usar esta notação no próximo exercício.

2. Verifique que se

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \quad (9)$$

então

$$(a) P_j(x_k) = 0 \text{ se } j \neq k$$

$$(b) P_k(x_k) \neq 0$$

(c) Para todo k $P'(x_k) \neq 0$

Esboce o gráfico de P e tente uma justificativa geométrica para o fato de que a derivada de P é diferente de zero se as raízes forem distintas.

Solução 2 (a) P_j tem todos os fatores $(x - x_k)$ exceto $(x - x_j)$ logo $P_j(x_k) = 0$ se $j \neq k$.

Como $(x - x_j)$ não é fator de P_j então $P_j(x_j) \neq 0$. Vemos assim que o valor de $P_j(x_k)$ é

$$\begin{cases} P_j(x_k) = 0 \leftarrow j \neq k \\ P_j(x_k) \neq 0 \leftarrow j = k \end{cases} \quad (10)$$

(b) O cálculo da derivada $P'(x_k)$:

$$P'(x) = \sum_{k=1}^3 P_k(x) \quad (11)$$

$$\text{dado } k \quad P'(x_k) = \sum_{j=1}^3 P_j(x_k) \quad (12)$$

$$P'(x_k) = P_k(x_k) \neq 0 \quad (13)$$

porque todos os termos em que $j \neq k$ se tem $P_k(x_j) = 0$. Portanto P' é diferente de zero em todos os nós e o seu valor é $P_k(x_k)$ em x_k .

Veja o esboço gráfico de P na figura (fig. 1) página 3, As retas

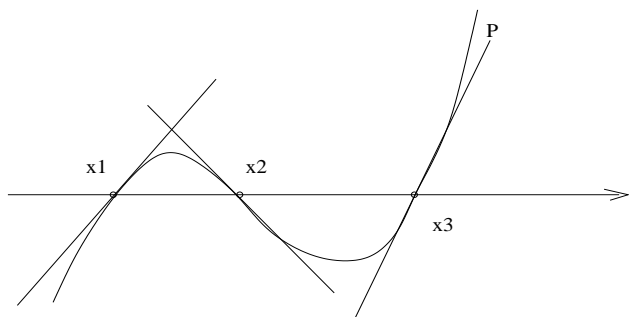


Figura 1: Polinômio de Lagrange

tangentes tem por coeficiente angular o valor da derivada de P no

ponto

$$m_1 = P'(x_1) \text{ é coeficiente angular em } x_1 \quad (14)$$

$$m_2 = P'(x_2) \text{ é coeficiente angular em } x_2 \quad (15)$$

$$m_3 = P'(x_3) \text{ é coeficiente angular em } x_3 \quad (16)$$

$$(17)$$

3. Verifique que se

$$P(x) = (x - x_1)^2(x - x_2)(x - x_3) \quad (18)$$

então $P'(x_1) = 0$.

Verifique que definindo

$$P_1(x) = \frac{2P(x)}{x - x_1}; P_2(x) = \frac{P(x)}{x - x_2}; P_3(x) = \frac{P(x)}{x - x_3}$$

então $P' = \sum_{k=1}^3 P_k$.

Esboce o gráfico de P e tente uma justificativa geométrica do valor zero ou diferente de zero das derivadas. Tente elaborar uma teoria geral sobre o assunto, comparando este caso com o anterior.

4. derivada algorítmica Considere o polinômio de grau n

$$P(x) = \prod_{k=1}^n (x - x_k) \quad (19)$$

(a) Verifique que

$$P'(x) = \sum_{k=1}^n P_k(x) \quad (20)$$

em que, para cada k , $P_k(x) = \frac{P(x)}{x - x_k}$.

(b) Encontre uma lei que descreva os valores $P_k(x_j)$

(c) Prove que se P for um polinômio definido pela equação (eq. 19) e as raízes x_k todas distintas, então $P'(x_k) \neq 0$ para todo $k = 1 \dots n$, o valor da derivada, em todos os nós, é diferente de zero.

(d) Faça um esboço gráfico de P e escreva uma pequena redação justificando, com uma argumentação geométrica, porque $P'(x_k) \neq 0$.

Solução 3 (a) É uma generalização dos exercícios anteriores, agora temos um produto de n monômios, todos tendo por derivada 1. Quando aplicarmos a derivada do produto teremos uma soma de n novos produtos, cada com $n - 1$ termos em cada um dos quais aparentemente dividimos P por cada um dos fatores, sucessivamente:

$$P_1 = \frac{P(x)}{x-x_1} \quad (21)$$

$$P_2 = \frac{P(x)}{x-x_2} \quad (22)$$

$$\vdots \quad (23)$$

$$P_n = \frac{P(x)}{x-x_n} \quad (24)$$

$$P'(x) = P_1(x) + P_2(x) + \dots + P_n(x) \quad (25)$$

$$P'(x) = \sum_{k=1}^n P_k(x) \quad (26)$$

(b) Valor de $P_k(x_j)$.

Para cada k , o polinômio $P_k(x)$ é um produto de $n-1$ termos em que o fator $(x-x_k)$ não está presente, logo

$$P_k(x_k) \neq 0.$$

Por outro lado todos os fatores $(x-x_j)$ com $j \neq k$ estão presentes em $P_k(x)$ e assim

$$P_k(x_j) = 0 \leftarrow j \neq k.$$

(c) Cálculo de $P'(x_j)$

$$P'(x_j) = \sum_{k=1}^n P_k(x_j) = P_j(x_j) \neq 0 \quad (27)$$

O gráfico de P corta o eixo OX em todos os nós se alternando com máximo ou mínimos locais entre as raízes. É um gráfico semelhante ao que você pode ver na figura (fig. 1) página 3.

5. * Verifique (tente uma demonstração) se P for dado pela equação (eq. 19) com todos os x_k distintos, então as raízes de P e P' "se entrelaçam" (tem uma) raiz de P' entre duas raízes de P . Escreva um teorema descrevendo inteiramente esta situação.

Solução 4 Como as raízes são todas distintas, (não há raízes múltiplas) então as raízes de P' são todas distintas das raízes de P .

Como entre duas raízes de P este polinômio terá um máximo ou um mínimo¹ local, então P' tem uma raiz entre duas raízes de P .

¹quem garante isto é a continuidade

6. * Por que a teoria do item anterior falha se houver raízes múltiplas em (eq. 19) ?

Solução 5 Porque quando houver uma raiz múltipla, ela também será raiz da derivada. Suponhamos que $x = a$ seja uma raiz com multiplicidade $n > 1$ então

$$f(x) = (x-a)^n g(x) \quad (28)$$

$$f'(x) = n(x-a)^{n-1} g(x) + (x-a)^n g'(x) = \quad (29)$$

$$f'(x) = (x-a)[n(x-a)^{n-2} g(x) + (x-a)^{n-1} g'(x)] \quad (30)$$

$$f'(a) = 0 \quad (31)$$

então $x = a$ também é raiz de f' .

7. * A hipótese essencial na teoria do exercício (exer. 5) é que P é uma função contínua e P' também é contínua. Generalize o (exer. 5) com estas duas hipóteses, para uma função f que é contínua e continuamente diferenciável.
8. *oscilação da derivada(1) Considere $P(x) = x^2 - a^2$. Encontre uma condição para que o máximo da derivada P' seja maior do que o máximo de P no intervalo que contém as raízes² $[-a, a]$; $a > 0$ Prove que se $|b-a| \leq 4$ então

$$|(x-a)(x-b)| \leq |2x-a-b| \implies x \in [a, b]$$

Sugestão: nada muda no tamanho (desigualdades) quando os gráficos forem trasladados...

9. *oscilação da derivada(2) Verifique que para $P(x) = x(x^2 - 1)$ o máximo da derivada P' é maior do que o máximo de P no intervalo que contém as raízes $[-1, 1]$
10. Polinômio interpolando pontos no plano

(a) Considere a sequência de nós

$$\{-2.5, -1.5, 0.5, 2, 3\} \subset [-3, 3]$$

e encontre P com estas raízes e calcule o módulo máximo, M , de P' .

(b) Solução ótima Calcule os coeficientes de $Q = P/M$

(c) Considere os pontos do plano

$$\{(-2.5, 0), (-1.5, 2), (-0.5, 3), (0.5, 3), (1.5, 1), (2.5, -2)\}$$

e calcule um polinômio que interpole este pontos usando o polinômio Q . Faça os gráficos.

²a condição $a > 0$ não é essencial, apenas facilita a apresentação do problema.

11. polinômio de Lagrange Considere a seqüência de nós

$$x_k \in \{-2.5, -1.5, 0.5, 2, 3\} \subset [-3, 3]$$

do intervalo $[-3, 3]$. Seja P o polinômio mônico³ que tem estes nós como raízes. E defina $P_k(x) = \frac{P(x)}{x-x_k}$.

(a) Calcule P' .

(b) Mostre que

$$P' = \sum_{k=1}^5 P_k.$$

(c) Mostre que

$$P_j(x_k) = 0 \implies j \neq k$$

(d) Mostre que

$$P'(x_j) = P_j(x_j)$$

(e) Defina

$$f(x) = \sum_{k=1}^5 \frac{P_k(x)}{P'(x_k)}$$

Verifique que f é um polinômio de grau no máximo 5. Calculando seus valores sobre os nós, verifique sua equação.

(f) Considere a seguinte sucessão de dados $y_k \in \{4, 1, -2, -5, 7\}$ e redefina $f(x) = \sum_{k=1}^5 \frac{y_k P_k(x)}{P'(x_k)}$. Mostre que $f(y_k) = y_k$ e que, portanto, o polinômio f interpola os pontos

$$(-2.5, 4), (-1.5, 1), (0.5, -2), (2, -5), (3, 7)$$

do plano.

(g) polinômio de Lagrange Considere uma seqüência de nós

$$(x_k)_{k=0}^n \subset [\alpha, \beta]$$

Seja P o polinômio mônico⁴ que tem estes nós como raízes. E defina $P_k(x) = \frac{P(x)}{x-x_k}$.

³aquele cujo coeficiente do termo de maior grau é 1, obtido com os produtos

$$(x-x_1) \cdots (x-x_5).$$

⁴aquele cujo coeficiente do termo de maior grau é 1, obtido com os produtos

$$(x-x_1) \cdots (x-x_8).$$

i. Calcule P' .

ii. Mostre que

$$P' = \sum_{k=0}^n P_k.$$

iii. Mostre que

$$P_j(x_k) = 0 \implies j \neq k$$

iv. Mostre que

$$P'(x_j) = P_j(x_j)$$

v. Defina

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{P_k(x)}{P'(x_k)}$$

Verifique que f é um polinômio de grau no máximo n . Calculando seus valores sobre os nós, verifique sua equação.

vi. Considere uma sucessão de dados $(y_k)_{k=0}^n$ e redefina $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{y_k P_k(x)}{P'(x_k)}$. Mostre que $f(y_k) = y_k$ e que, portanto, o polinômio f interpola os pontos

$$((x_k, y_k)_{k=0}^n)$$

do plano.

(h) Considere uma sucessão (crescente) de nós $(x_k)_{k=0}^n$ de um intervalo $[a, b]$. Seja P o polinômio mônico⁵ que tem estes nós como raízes. E defina $P_k(x) = \frac{P(x)}{x-x_k}$. Verifique que

i.

$$P' = \sum_{k=0}^n P_k$$

ii.

$$P_j(x_k) = 0 \implies j \neq k$$

iii.

$$P_j(x_j) = P'(x_j)$$

iv. $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{P_k(x)}{P'(x_k)}$ é um polinômio de grau no máximo n . Calculando seus valores sobre os nós, verifique sua equação.

v. Polinômio de Lagrange Considere uma sucessão de dados $(y_k)_{k=0}^n$ e redefina $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{y_k P_k(x)}{P'(x_k)}$. Mostre que $f(y_k) = y_k$

Você encontra a nova versão do meu livro de Cálculo Numérico aqui <http://www.calculo-numerico.sobralmatematica.org/textos/>

⁵aquele cujo coeficiente do termo de maior grau é 1, obtido com os produtos

$$(x-x_0) \cdots (x-x_n).$$