

Cálculo Numérico Computacional **Lista 05**
Raízes e recursividade `tarcisio@member.ams.org`
T. Praciano-Pereira **Dep. de Matemática**
alun@:

Univ. Estadual Vale do Acaraú	4 de agosto de 2008
Documento escrito com \LaTeX	sis. op. Debian/Gnu/Linux

1 Informações

Entrega desta lista: 08 de Agosto, sexta-feira, até 24:00 h, via eletrônica, para o meu e-mail, ou até 22 horas, na secretária do Curso de Matemática pelo método medieval, ou em CD.

Por favor, prenda esta *folha de rosto* na sua solução desta lista, deixando-a em branco. Ela será usada na correção, caso você a entregue pelo método medieval.

2 Descrição e Objetivo

Os exemplos de determinação de *raízes* nas listas anteriores devem tê-l@ levad@ à conclusão de que este é um problema difícil. Na verdade somente podemos resolvê-lo auxiliando a máquina (os programas) com nossa intuição. Mas são os métodos que interessa e não o problema em si. Nesta lista vamos fazer a revisão final destes métodos agora com o enfoque na *recursividade* que eles tem: o *método da tangente*, o *método da secante*, *busca binária*. Em cada caso há uma breve introdução que não substitui uma leitura do livro texto, as minhas notas de aula, capítulos 2, 3, ou de outros livros de Cálculo Numérico.

Esta é a última lista em que estou me preocupando com programação, construção, teste e verificação dos programas. Estamos usando busca de raízes como motivação para fazer programas. Programas com sub-rotinas.

O instrumento matemático são *sucessões* sendo a raiz o *limite da sucessão* construída: sucessão e limite. O programa é o método para definir a sucessão, e o ponto de parada do programa é definido pelo critério de aproximação (precisão) escolhido.

Leitura: Capítulos 2,3 do livro `anadu00.pdf`

palavras chave: algoritmo dos babilônios, aproximação, busca binária, método da secante, método da tangente, raízes, recursividade, precisão.

3 Recursividade, raízes de funções

1. O método da tangente

Orientação A idéia consiste em, *descoberto um intervalo $[a, b]$ em que f*

troque de sinal, construir duas sucessões

$$m_0, m_1, \dots \text{ dos coeficientes angulares;} \quad (1)$$

$$s_0, s_1, \dots \text{ das raízes aproximadas;} \quad (2)$$

m_0 é o coeficiente angular da reta tangente no ponto $a_0 = a$ e s_0 é a raiz desta função do primeiro grau, e sucessivamente, agora, considerando

- $a_{k+1} = s_k$;
- $m_{k+1} = f'(a_{k+1})$ é o coeficiente angular da nova reta tangente em $(a_{k+1}, f(a_{k+1}))$;
- s_{k+1} é o zero da nova reta tangente, no ponto $(a_{k+1}, f(a_{k+1}))$

- (a) Rode o programa `exer05_01_01.gnuplot` e procure identificar as duas sucessões indicadas acima com a sucessão de gráficos que o programa produz. Use a saída de dados do programa para escrever alguns dos valores desta sucessões (modifique o programa).
- (b) Altere o programa, dando nomes diferentes às equações das retas tangentes, para que seja feito o gráfico de todas as retas tangentes simultaneamente e você possa ter uma visão de conjunto da sucessão de raízes aproximadas.
- (c) O fluxograma da figura (1) página 2, esquematiza um programa (a

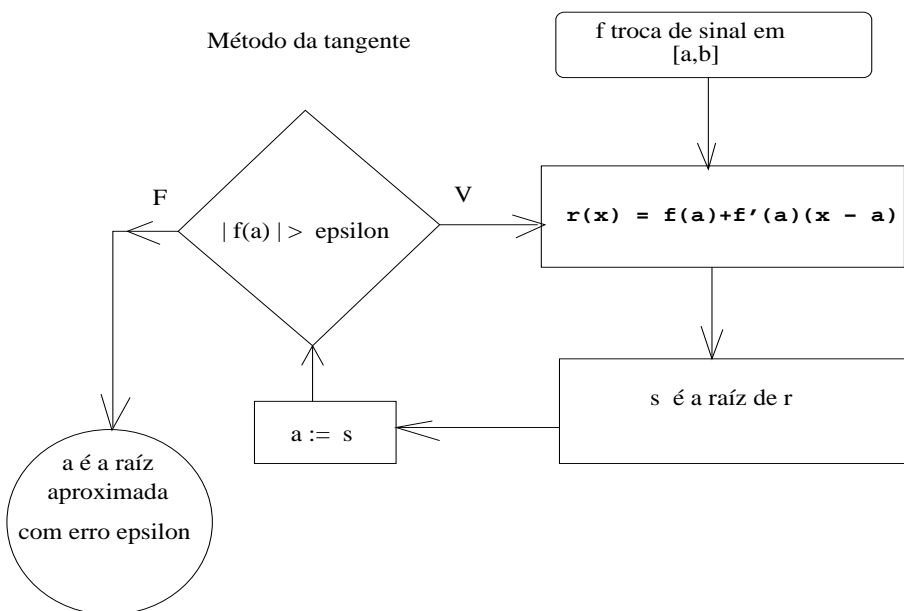


Figura 1: Raiz pelo método da reta tangente

ser desenvolvido em Pascal, C ou calc). O programa termina quando o teste

$$|f(a)| > \epsilon \quad (3)$$

se verificar falso

(d) Método da tangente, equações formais

Para uma função f arbitrária, diferenciável, supondo que no intervalo $[a, b]$ ela troque de sinal.

- i. Identifique a expressão da raiz da equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$

A. $a + \frac{f(a)}{f'(a)}$

B. $a - \frac{f'(a)}{f(a)}$

C. $a - \frac{f(a)}{f'(a)}$

- ii. Chame a raiz encontrada no item anterior de s_0 , e chame a raiz da reta tangente ao ponto $(s_0, f(s_0))$ de s_1 . Então

A. $s_1 = s_0 + \frac{f(s_0)}{f'(s_0)}$

B. $s_1 = s_0 + \frac{f'(s_0)}{f(s_0)}$

C. $s_1 = s_0 - \frac{f(s_0)}{f'(s_0)}$

- iii. Depois de n passos vamos encontrar a raiz da reta tangente ao ponto $(s_n, f(s_n))$ que chamaremos s_{n+1} . Então

A. $s_{n+1} = s_n + \frac{f(s_n)}{f'(s_n)}$

B. $s_{n+1} = s_n + \frac{f'(s_n)}{f(s_n)}$

C. $s_{n+1} = s_n - \frac{f(s_n)}{f'(s_n)}$

- iv. Se definirmos

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad (4)$$

então o próximo elemento, na sucessão de raízes aproximadas, pelo método da tangente é dado por

A) $s_{n+1} = F(s_n)$ B) $s_{n+1} = 1 - F(s_n)$ C) $s_{n+1} = F(s_n + 1)$

D) $s_{n+1} = 1 - F(s_n)$ E) $s_{n+1} = F(s_n - 1)$ F) $s_{n+1} = s_n - F(s_n)$

- (e) Para cada uma das funções

A) $f(x) = x^3 + 1.95x^2 - 3.150x - 6.139$

B) $f(x) = -0.1605(x^2 - 1.3675x - 5.565)\cos(x)$

C) $f(x) = \sin(x/3.0)(x^2 - 2x - 15)$

D) $f(x) = \cos(x/3.0)(x^2 - 2x - 15) - 7$

encontre as raízes pelo método da tangente, no intervalo $[-10, 10]$. Você pode visualizar os gráficos com `gnuplot` e verificar assim se

estiver aplicando o método de forma efetiva. Altere o programa `exer05_01_01.gnuplot`.

Erro $\epsilon = 0.01$.

Justifique todos os cálculos.

- (f) Escreva um programa que varrendo o intervalo $[-10, 10]$ descubra os intervalos em que f troca de sinal, e ao descobrir um intervalo chame uma rotina que determine a raiz pelo método da tangente com um erro $\epsilon = 0.01$.

Sugestão Você encontra na página da disciplina algum programa cujo nome sugere busca de raízes.

- (g) Aplique o programa em cada uma das funções do exercício (1e) até que tenha certeza que seu programa está correto. Altere o programa `exer05_01_01.gnuplot`.

2. O método da secante Semelhante ao método da tangente, mas agora, ao identificarmos um intervalo $[a, b]$ em que f troque de sinal, consideramos a reta determinada pelos pontos $(a, f(a)), (b, f(b))$ cuja raiz deve ser encontrada.

Na figura (2) página 4, você tem uma visão gráfica do que representa o método da secante, Na figura (3) página 5, você tem o fluxograma que

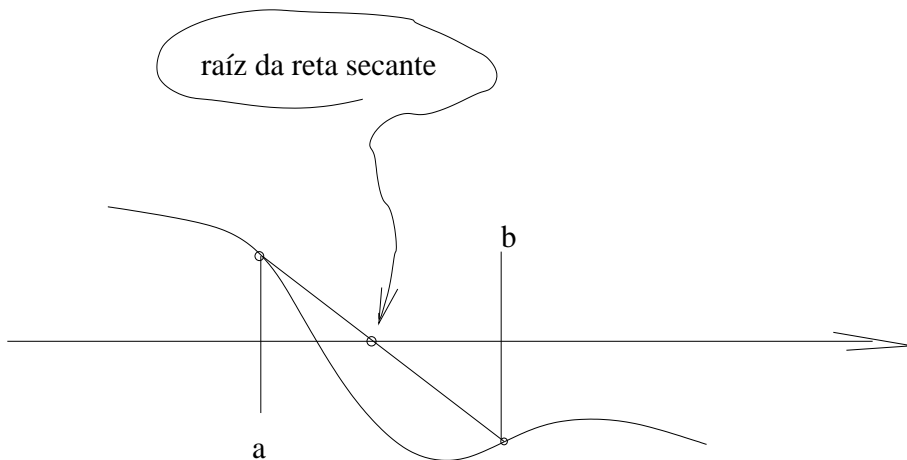


Figura 2: O método da secante

descreve o método. O sistema fica em loop até que a condição de precisão

$$|f(s)| < \epsilon \quad (5)$$

seja encontrada, no ponto de decisão, no fluxograma, você encontra a desigualdade complementar, por que ?

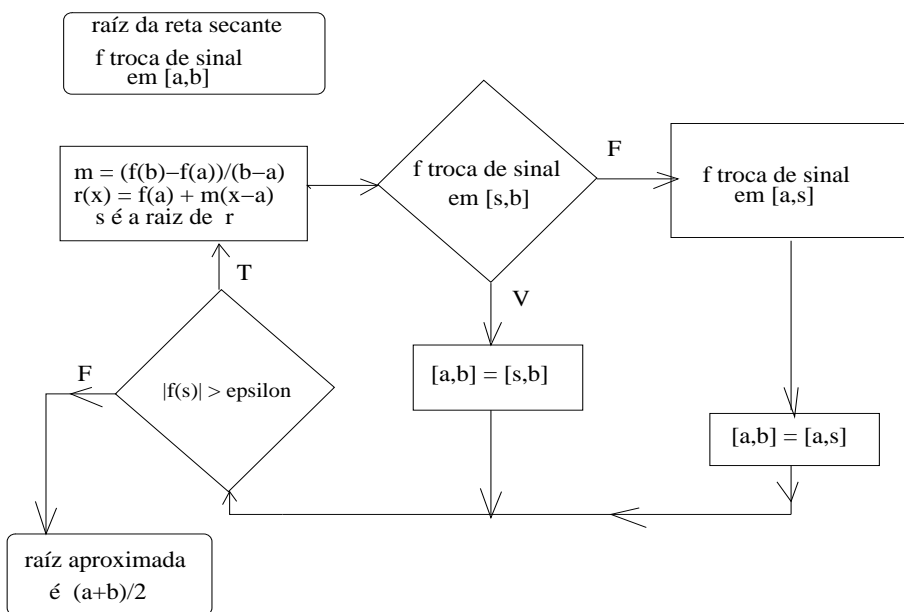


Figura 3: fluxograma - método da secante

- Faça um gráfico, por exemplo com `xfig` ilustrando três passos sucessivos do método da secante.
- Altere o programa `exer05_01_01.gnuplot` para obter raízes da secante em vez de raízes da tangente.
- Aplice o método da secante às equações do exercício (1e), para determinar raízes das funções com precisão $\epsilon = 0.01$, no intervalo $[-10, 10]$.
- Escreva um programa que varra o intervalo $[-10, 10]$ e ao encontrar um intervalo em que f troque de sinal, chame uma rotina que encontre a raiz, com precisão $\epsilon = 0.01$. Aplique o programa às funções do exercício 1e até se convencer de que o programa está funcionando corretamente.

3. Método da secante, equações formais

Para uma função f arbitrária, diferenciável, supondo que no intervalo $[a, b]$ ela troque de sinal.

- Identifique a expressão da raiz da equação da reta secante ao gráfico de f no intervalo $[a, b]$ onde foi detectada uma troca de sinal.
 - $m + \frac{f(a)}{f'(a)}$
 - $a - \frac{f'(a)}{m}$
 - $a - \frac{m}{f'(a)}$
 - $a - \frac{f(a)}{m}$
 com $m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

- (b) Ao detectarmos uma troca de sinal usamos a reta secante ao gráfico para encontrar uma aproximação da raiz. Uma melhor aproximação pode ser obtida iterando o método então

Chame a raiz encontrada, pelo método da secante, no intervalo inicial, $[a, b]$, de s_0 .

- i. A próxima reta secante a ser considerada corresponde ao intervalo $[a, s_0]$.
 - ii. A próxima reta secante a ser considerada corresponde ao intervalo $[s_0, b]$.
 - iii. A próxima reta secante a ser considerada pode tanto se encontrar sobre intervalo $[s_0, b]$, como sobre o intervalo $[a, s_0]$.
 - iv. Se f trocar de sinal no intervalo $[s_0, b]$, é neste intervalo que vai se encontrar a o próximo valor da raiz aproximada pelo método da reta secante. No caso contrário ela vai estar no intervalo $[a, s_0]$.
- (c) Chame de s_0 , e chame a raiz da reta secante no intervalo inicial $[a, b]$ onde f troca de sinal. A expressão do próximo elemento na sucessão que se aproxima da raiz, pelo método da secante é s_1 , com

i. $s_1 = m_0 + \frac{f(s_0)}{f'(s_0)}$

ii. $s_1 = s_0 - \frac{f(s_0)}{m_0}$

iii. $s_1 = s_0 - \frac{m_0}{f'(s_0)}$

iv. $s_1 = m_0 - \frac{f(s_0)}{f'(s_0)}$

e $m_0 = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

- (d) Depois de n passos vamos encontrar uma aproximação da raiz pelo método da reta secante selecionando intervalos em função da troca de sinal. Os comandos, dentro do loop que regem o processo, são três, identifique o “kit” correto abaixo, admitindo: (notação)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{troca de sinal no intervalo } [a, b] , \\ m \text{ é o coeficiente angular da reta secante neste intervalo e} \\ s \text{ é a raiz da equação da secante neste intervalo.} \end{array} \right. \quad (6)$$

i. `se(f(a)*f(s) <=0) ; a = s ; m = (f(b)-f(a))/(b-a)`
`senão b = s ; ; m = (f(b)-f(a))/(b-a)`
`s = a - f(a)/m`

ii. `se(f(a)*f(s) <=0) ; a = s ; m = (f(b)-f(a))/(b-a)`
`senão b = s ; ; m = (f(b)-f(a))/(b-a)`
`s = b - f(b)/m`

iii. `se(f(a)*f(s) <=0) ; b = s ; m = (f(b)-f(a))/(b-a)`
`senão a = s ; ; m = (f(b)-f(a))/(b-a)`
`s = s - f(s)/m`

- se($f(a)*f(s) \leq 0$) ; $b = s$; $m = (f(b)-f(a))/(b-a)$
- iv. senão $a = s$; ; $m = (f(b)-f(a))/(b-a)$
 $s = s - m/f(a)$
- v. Há dois “kits” corretos acima, entretanto o uso dos dois representa *um defeito de padronização da notação*, impede que você compare o seu trabalho com o trabalho de um@ colega.

(e) Se definirmos

$$F(x, m) = x - \frac{f(x)}{m} \quad (7)$$

então o próximo elemento, na sucessão de raízes aproximadas, pelo método da secante é dado por

$$\begin{array}{lll} \text{A) } s_{n+1} = F(s_n) & \text{B) } s_{n+1} = 1 - F(s_n) & \text{C) } s_{n+1} = F(s_n + 1) \\ \text{D) } s_{n+1} = 1 - F(s_n) & \text{E) } s_{n+1} = F(s_n - 1) & \text{F) } s_{n+1} = s_n - F(s_n) \end{array}$$

em que m é o coeficiente angular da reta secante no intervalo considerado anteriormente.

4. A busca binária é um método com importância própria, consiste em subdividir o intervalo $[a, b]$, em que foi detectada uma troca de sinal na metade: $s = a + \frac{b-a}{2}$ e verificar onde houve troca de sinal

- em $[a, s] \Rightarrow b = s$ ou
- em $[s, b] \Rightarrow a = s$

e continua sempre chamando o intervalo de $[a, b]$

- (a) Refaça o fluxograma, figura (3) página 5, para que ele represente o *método da busca binária*.

Solução: figura 4

- (b) Num programa que faça *procura binária* para encontrar raiz de f sob a suposição de que há uma troca de sinal no intervalo $[a, b]$ contém os seguintes comandos no laço que faz esta busca:

$$\begin{array}{l} \text{i.} \left\{ \begin{array}{l} s = \frac{a+b}{2} \\ \text{se}(f(a)*f(s) \leq 0) ; a = s ; m = (f(b)-f(a))/(b-a) \\ \text{senão } b = s ; ; m = (f(b)-f(a))/(b-a) \\ s = a - f(a)/m \end{array} \right. \\ \text{ii.} \left\{ \begin{array}{l} s = \frac{a+b}{2} \\ \text{se}(f(a)*f(s) \leq 0) ; a = s ; m = (f(b)-f(a))/(b-a) \\ \text{senão } b = s ; ; m = (f(b)-f(a))/(b-a) \\ s = b - f(b)/m \end{array} \right. \\ \text{iii.} \left\{ \begin{array}{l} s = \frac{a+b}{2} \\ \text{se}(f(a)*f(s) \leq 0) ; a = s ; \\ \text{senão } b = s ; ; \end{array} \right. \\ \text{iv.} \left\{ \begin{array}{l} \text{se}(f(a)*f(s) \leq 0) ; a = s ; \\ \text{senão } b = s ; ; \\ s = \frac{a+b}{2} \end{array} \right. \end{array}$$

- (c) Aplique o método da busca binária às equações do exercício (1e), para determinar raízes das funções com precisão $\epsilon = 0.01$, no intervalo $[-10, 10]$. Escreva um programa, ou altere o programa `exer05_01_01.gnuplot`.

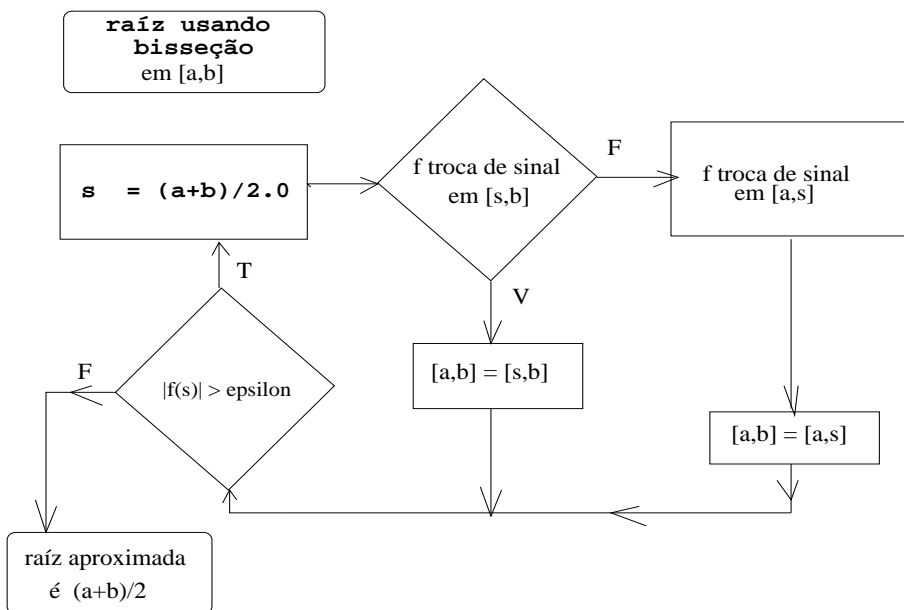


Figura 4: Método da busca binária