

Cálculo Numérico Computacional Exercícios lista 04
 Raízes aproximadas: Varredura método da tangente
 Prof. Tarcísio Praciano-Pereira Dep. de Matemática
 tarcisio@member.ams.org

aluno:

Univ. Estadual Vale do Acaraú Sobral, 25 de julho de 2008

Documento escrito com \LaTeX sis. op. Debian/Gnu/Linux

página da disciplina: www.calculo-numerico.sobralmatematica.org

Por favor, prenda esta folha de rosto na sua solução desta lista deixando-a em branco, caso você a responda em papel. Ela será usada para a correção. Se você quiser entregar esta lista pelo método medieval, entregue-a na secretária do curso de Matemática até a data estipulada observando o horário de abertura da secretaria.

Entrega eletrônica, em CD, também na Secretária do Curso de Matemática ou enviando o arquivo para o meu e-mail. Preferencialmente entregue em pdf.

data da entrega desta lista: 01 de Agosto de 2008 até 24:00 h, via eletrônica ou até 22 horas, na secretária do Curso de Matemática pelo método medieval, ou arquivo em CD

Os CD com os arquivos do AP01 e listas de exercícios, estarão na Secretaria do Curso de Matemática, a partir de terça-feira, à disposição dos respectivos donos.

1 Orientação

Texto básico, capítulo 2 do meu livro de Cálculo Numérico que se encontra na página da disciplina,

<http://www.calculo-numerico.sobralmatematica.org>, procure o link "textos".

Objetivo: Aplicar "varredura" na solução de problemas que modelem um fenômeno ao longo de um intervalo. Calcular aproximadamente a raiz de f usando a equação da reta tangente ou da reta secante.

Todo os gráficos podem ser feitos com `gnuplot` porém tenha o cuidado de garantir as proporções como uma prova de que você está entendendo.

Vamos estudar uma metodologia que tem 200 anos, o objetivo em si não é a determinação de raízes, mas dominar uma técnica que tem aplicações diversas.

As questões estão redigidas na forma de um tutorial, se dividem em itens de tal modo que devem auxiliá-l@ a avançar na solução à medida que você as for resolvendo. Na primeira questão você deve justificar as passagens que lhe serão apresentadas, nas outras você deve aplicar o método em outros exemplos.

palavras chave: `gnuplot`, raiz aproximada, raízes de funções polinomiais, malha, varredura

2 Exercícios

1. raízes de uma função Na figura (1), página 2,

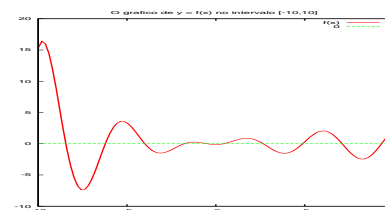


Figura 1: Gráfico de $y = f(x)$

você tem o gráfico de f com `gnuplot` no intervalo $[-10, 10]$. Vamos exemplificar o método da tangente para determinação aproximada das raízes de f

$$f(x) = (2x + 1) \sin\left(\frac{(x + 4)\sqrt{2}}{x + 13}\right) \quad (1)$$

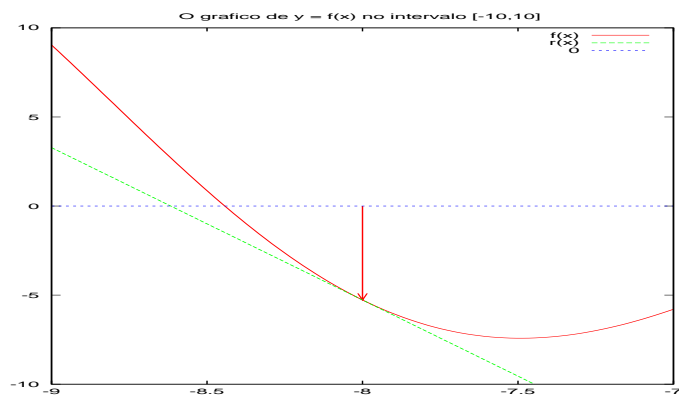
- (a) Explique cada uma das linhas do código escrito no dialeto do `gnuplot`

```
f(x) = (2*x + 1)*3*sin((x + 4)*sqrt(2))/(x + 13)
delta = 0.000001
df(x) = (f(x+delta)-f(x))/delta
r(x) = f(a) + df(a)*(x-a)
a = -8
plot f(x), r(x)
print f(-9)*f(-8)
      -47.6806461396095
set terminal postscript portrait
set output "exer04_02.eps"
a = -8
set xrange [-9:-8]
plot f(x), r(x), 0
```

- (b) A figura (2), página 3, traz o gráfico da reta r , tangente ao gráfico de f no ponto $(-8, f(-8))$. Decida qual das afirmações seguintes é verdadeira:

- i. O comando do `gnuplot`

```
print f(-9)*f(-8)
      -47.6806461396095
```

Figura 2: Retta tangente em $(-8, f(-8))$

significa que a função f tem um zero no intervalo $[-9, -8]$.

ii. f troca de sinal no intervalo $[-9, -8]$.

iii. a expressão do zero da reta tangente

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

$$\text{é } x_0 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

iv. O seguinte código (dialeto do `gnuplot`), como continuação do pedaço escrito no item (1a), calcula o zero da reta tangente e calcula o valor de f neste número.

```
set xrange [-9:-8]
plot f(x), r(x), 0
a = -8.0
a = a - f(a)/df(a)
print a , f(a)
-8.61678108885533 2.70498744375447
```

v. O ponto onde a reta r corta o eixo OX , ver figura (2), página 3, é, visualmente, uma *aproximação* para o zero de f que se encontra no intervalo $[-9, -8]$.

(c) Escreva um comentário sobre a “*aproximação*” mencionada no item [1(b)iv], acima, e os valores seguintes

```
print a , f(a)
-8.61678108885533 2.70498744375447
```

produzidos pelo `gnuplot`. O professor não estaria enganado em chamar isto de “*aproximação*” ?

(d) Explique a seguinte sucessão de comandos do `gnuplot`

```
a = -8
a = a - f(a)/df(a)
set output 'exer04_03.eps'
plot f(x), r(x), 0
a = a - f(a)/df(a)
set output 'exer04_04.eps'
plot f(x), r(x), 0
a = a - f(a)/df(a)
set output 'exer04_05.eps'
plot f(x), r(x), 0
a = a - f(a)/df(a)
set output 'exer04_06.eps'
a = a - f(a)/df(a)
plot f(x), r(x), 0
```

A figura (3), página 7, contém o resultado da sucessão de comandos no item (1d)

2. A raiz da reta tangente

sugestão: Se inspire em `exer04_02.gnuplot` que você encontra no link “soluções” da página da disciplina e nos itens anteriores para construir uma sucessão de pontos

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

que se aproxima (tem por limite) de um zero de f .

(a) Calcule a raiz (o zero) da reta tangente ao gráfico de

$$f(x) = (2x + 1) \sin\left(\frac{(x+4)\sqrt{2}}{x+13}\right)$$

no ponto

$$(a, f(a)) ; a = -5.$$

Chame esta raiz de a_1 e calcule

$$b_1 = f(a_1).$$

(b) Faça os gráficos simultâneos de f e da reta tangente.

(c) Faça um zoom no gráfico, use `set xrange` para verificar que a raiz da reta tangente representa uma aproximação da raiz de f .

Calcule o valor $f(a_1)$, lembre-se que `gnuplot` sabe fazer isto, use `print`.

- (d) Calcule a raiz (o zero) da reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto $(a_1, f(a_1))$. Chame esta raiz de a_2 e calcule

$$b_2 = f(a_2).$$

Observe que `gnuplot` sabe calcular estes valores.

- (e) Faça os gráficos simultâneos de f e da reta tangente.
 (f) Faça um zoom no gráfico, use `set xrange` para verificar que a raiz da reta tangente representa uma aproximação da raiz de f . Calcule o valor $f(a_2)$, lembre-se que `gnuplot` sabe fazer isto, use `print`.
 (g) Prossiga com o método e calcule $a_3, f(a_3)$ fazendo os gráficos.

Solução 1 `exer04_02.gnuplot` que você encontra no link “soluções” da página.

3. A fórmula da raiz da reta tangente Escreva a equação da reta tangente ao gráfico de uma função f no ponto $(a, f(a))$ e escreva a expressão da raiz desta função do primeiro grau.

Solução 2 `exer04_03.png` que você encontra no link “soluções” da página.

4. Procura de raízes de uma função

- (a) Faça uma varredura inteira do intervalo $[-10, 10]$ para encontrar pontos em que

$$f(x) = (2x + 1) \sin\left(\frac{(x + 4)\sqrt{2}}{x + 13}\right)$$

troca de sinal. Use `passo = 1` e trabalhe no intervalo $[-10, 10]$. Experimente com `gnuplot`, faça o gráfico, para ter uma visão antecipada do que vai acontecer. A condição para testar *trocadas de sinal* é

```
if (f(x)*f(x+delta) <= 0)
    printf('houve troca de sinal no intervalo\n
[\%f, \%f] \n', x, x+delta);
```

ou em Pascal

```
if (f(x)*f(x+delta) <= 0) then
    writeln('houve troca de sinal no intervalo ['',x,'',',',x+delta,'']');
```

sugestão estude `exer04_04.gnuplot` que você encontra nas soluções da página.

5. Com a informação obtida nos itens anteriores, faça um esboço gráfico de $y = f(x)$ no intervalo $[-10, 10]$. Para isto use um programa que lhe permita desenho à mão livre, sob Linux você encontra `xfig`. Observe que você pode obter o gráfico de f com `gnuplot` para testar se você usou corretamente as informações, faça isto.

6. Questão discursiva. Defeito do método: O método das tangentes nem sempre funciona como o seguinte exemplo mostra.

- (a) Considere $P(x)$ o polinômio do terceiro grau no gráfico (4) página 8, sabendo que o gráfico de P é tangente ao gráfico das retas

$$y = x - 3, y = x + 1$$

obtenha a equação de P .

- (b) Justifique porque o método da tangente não funciona com $y = P(x)$ no intervalo $[-1, 3]$ em que P troca de sinal.

7. Quando uma função troca de sinal sobre um intervalo $[a, b]$ sendo contínua se anula em algum ponto deste intervalo. O zero da reta secante que passa nos pontos $(a, f(a)), (b, f(b))$ representa outra forma de aproximar o zero da função f .

- (a) Escreva a equação da reta secante que passa nos pontos

$$(a, f(a)), (b, f(b))$$

- (b) Escreva a expressão do zero desta reta.

- (c) Calcule a_1 , o zero desta equação do primeiro grau, no intervalo $[-9, 8] = [a, b]$ com

$$f(x) = (2x + 1) \sin\left(\frac{(x + 4)\sqrt{2}}{x + 13}\right) \quad (2)$$

e experimente o erro calculando $f(a_1)$. Faça os gráficos.

- (d) Pode ocorrer uma das possibilidades:

- f troca de sinal no sub-intervalo $[a, a_1]$ ou
- f troca de sinal no sub-intervalo $[a_1, b]$
- a_1 ser exatamente o zero de f .

Suponha a terceira excluída (tornaria a questão trivial). Chame novamente $[a, b]$ o intervalo em que ocorre a troca de sinal (isto é computação - não é Matemática - discuta porque!). Calcule o ponto a_2 - o zero da nova reta secante. Faça os gráficos.

- (e) O processo descrito no item anterior pode ser iterado produzindo uma sucessão

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

que tem por limite o zero exato de f .

Escreva um programa que calcule esta sucessão até um valor n estipulado por você e verificando em cada passo o valor de $f(a_n)$.

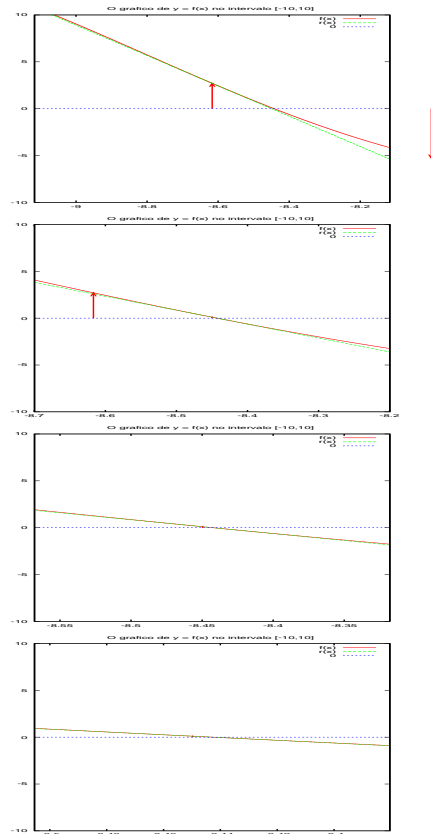


Figura 3: Sucessão de retas tangentes

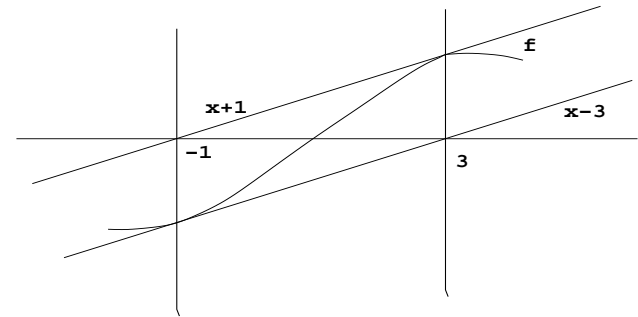


Figura 4: Método da tangente para raízes