Cálculo Numérico Computacional	Exercícios **lista 04**
Raizes aproximadas: Varredura	método da tangente
Prof. Tarcisio Praciano-Pereira	**Dep. de Matemática**
tarcisio@member.ams.org	
aluno:	
Univ. Estadual Vale do Acaraú	Sobral, 25 de julho de 2008
`Documento escrito com LaTeX`	`sis. op. Debian/Gnu/Linux`
`página da disciplina:`	`www.calculo-numerico.sobralmatematica.org`

Por favor, prenda esta folha de rosto na sua solução desta lista deixando-a em branco, caso você a responda em papel. Ela será usada para a correção. Se você quiser entregar esta lista pelo método medieval, entregue-a na secretária do curso de Matemática até a data estipulada observando o horário de abertura da secretaria.

Entrega eletrônica, em CD, também na Secretária do Curso de Matemática ou enviando o arquivo para o meu e-mail. Preferencialmente entregue em pdf.

data da entrega desta lista: 01 de Agosto de 2008 até 24:00 h, via eletrônica ou até 22 horas, na secretária do Curso de Matemática pelo método medieval, ou arquivo em CD

Os CD com os arquivos do AP01 e listas de exercícios, estarão na Secretaria do Curso de Matemática, a partir de terça-feira, à disposição dos respectivos donos.

1 Orientação

Texto básico, capítulo 2 do meu livro de Cálculo Numérico que se encontra na página da disciplina,

`http://www.calculo-numerico.sobralmatematica.org`,

procure o link "textos".

Objetivo: Aplicar "`varredura`" na solução de problemas que modelem um fenômeno ao longo de um intervalo. Calcular aproximadamente a raíz de f usando a equação da reta tangente ou da reta secante.

Todo os gráficos podem ser feitos com `gnuplot` porém tenha o cuidado de garantir as proporções como uma prova de que você está entendendo.

Vamos estudar uma metodologia que tem 200 anos, o objetivo em si não é a determinação de raízes, mas dominar uma técnica que tem aplicações diversas.

As questões estão redigidas na forma de um tutorial, se dividem em itens de tal modo que devem auxiliá-l@ a avançar na solução à medida que você as for resolvendo. Na primeira questão você deve justificar as passagens que lhe serão apresentadas, nas outras você deve aplicar o método em outros exemplos.

palavras chave: gnuplot, raíz aproximada, raízes de funções polinomiais, malha, varredura

2 Exercicios

1. raízes de uma função Na figura (1), página 2,

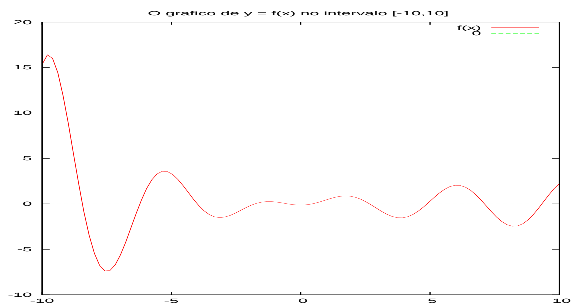

Figura 1: Gráfico de $y = f(x)$

você tem o gráfico de f com `gnuplot` no intervalo $[-10, 10]$. Vamos exemplificar o método da tangente para determinação aproximada das raizes de f

$$f(x) = (2x + 1)\sin(\frac{(x + 4)\sqrt{2}}{x + 13}) \tag{1}$$

(a) Explique cada uma das linhas do código escrito no dialeto do `gnuplot`

```
f(x) =  (2*x + 1)*3*sin((x + 4)*sqrt(2))/(x + 13)
delta = 0.000001
df(x) = (f(x+delta)-f(x))/delta
r(x) = f(a) + df(a)*(x-a)
a = -8
plot f(x),0,r(x)
print f(-9)*f(-8)
    -47.6806461396095
set terminal postscript portrait
set output "exer04_02.eps"
a = -8
set xrange [-9:-8]
plot f(x), r(x),0
```

(b) A figura (2), página 3, traz o gráfico da reta $\underline{r}$, tangente ao gráfico de f no ponto $(-8, f(-8))$. Decida qual das afirmações seguintes é verdadeira:

   i. O comando do `gnuplot`

```
print f(-9)*f(-8)
-47.6806461396095
```

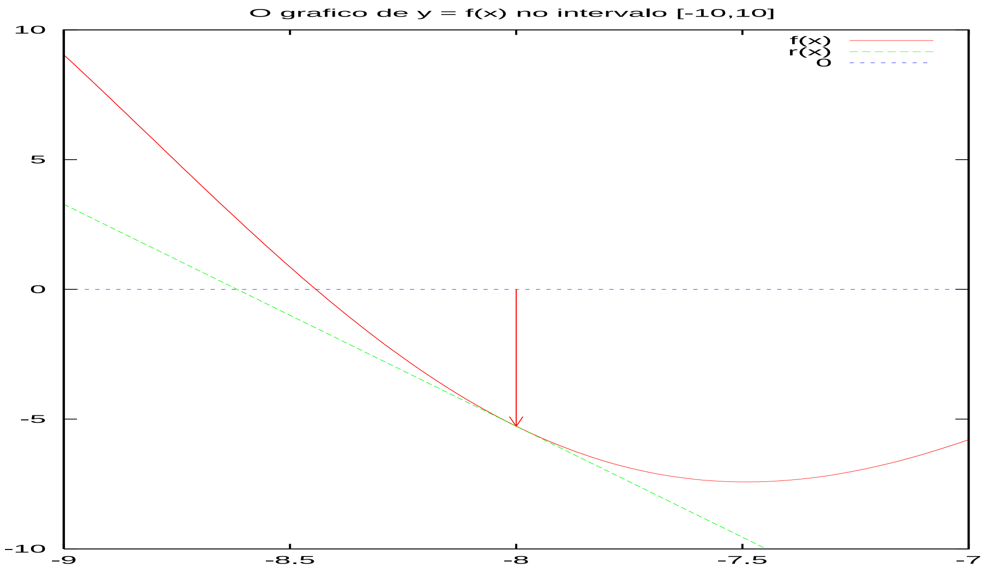

Figura 2: Reta tangente em $(-8, f(-8))$

significa que a função f tem um zero no intervalo $[-9, -8]$..

ii. f troca de sinal no intervalo $[-9, -8]$.

iii. a expressão do zero da reta tangente

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

é $x_0 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$

iv. O seguinte código (dialeto do `gnuplot`), como continuação do pedaço escrito no item (1a), calcula o zero da reta tangente e calcula o valor de f neste número.

```
set xrange [-9:-8]
plot f(x), r(x),0
a = -8.0
a = a - f(a)/df(a)
print a , f(a)
-8.61678108885533 2.70498744375447
```

v. O ponto onde a reta $\underline{r}$ corta o eixo OX, ver figura (2), página 3, é, visualmente, uma *aproximação* para o zero de f que se encontra no intervalo $[-9, -8]$.

(c) Escreva um comentário sobre a "*aproximação*" mencionada no item [1(b)iv], acima, e os valores seguintes

```
print a , f(a)
-8.61678108885533 2.70498744375447
```

produzidos pelo `gnuplot`. O professor não estaria enganado em chamar isto de "*aproximação*" ?

(d) Explique a seguinte sucessão de comandos do `gnuplot`

```
a = -8
a = a - f(a)/df(a)
set output 'exer04_03.eps'
plot f(x), r(x),0
a = a - f(a)/df(a)
set output 'exer04_04.eps'
plot f(x), r(x),0
a = a - f(a)/df(a)
set output 'exer04_05.eps'
plot f(x), r(x),0
a = a - f(a)/df(a)
set output 'exer04_06.eps'
a = a - f(a)/df(a)
plot f(x), r(x),0
```

A figura (3), página 7, contém o resultado da sucessão de comandos no item (1d)

2. A raíz da reta tangente

sugestão: Se inspire em `exer04_02.gnuplot` que você encontra no link "soluçoes" da página da disciplina e nos itens anteriores para construir uma sucessão de pontos

$$a_1, a_2, \ldots a_n$$

que se aproxima (tem por limite) de um zero de f.

(a) Calcule a raíz (o zero) da reta tangente ao gráfico de

$$f(x) = (2x+1)\sin(\frac{(x+4)\sqrt{2}}{x+13})$$

no ponto

$$(a, f(a))\ ;\ a = -5.$$

Chame está raíz de a_1 e calcule

$$b_1 = f(a_1).$$

(b) Faça os gráficos simultâneos de f e da reta tangente.

(c) Faça um zoom no gráfico, use `set xrange` para verificar que a raíz da reta tangente representa uma aproximação da raíz de f.

Calcule o valor $f(a_1)$, lembre-se que `gnuplot` sabe fazer isto, use `print`.

(d) Calcule a raíz (o zero) da reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto $(a_1, f(a_1))$. Chame está raíz de a_2 e calcule

$$b_2 = f(a_2).$$

Observe que `gnuplot` sabe calcular estes valores.

(e) Faça os gráficos simultâneos de f e da reta tangente.

(f) Faça um zoom no gráfico, use `set xrange` para verificar que a raíz da reta tangente representa uma aproximação da raíz de f.
Calcule o valor $f(a_2)$, lembre-se que `gnuplot` sabe fazer isto, use `print`.

(g) Prossiga com o método e calcule $a_3, f(a_3)$ fazendo os gráficos.

Solução 1 `exer04_02.gnuplot` *que você encontra no link "soluções" da página.*

3. A fórmula da raíz da reta tangente Escreva a equação da reta tangente ao gráfico de uma função f no ponto $(a, f(a))$ e escreva a expressão da raíz desta função do primeiro grau.

Solução 2 `exer04_03.png` *que você encontra no link "soluções" da página.*

4. Procura de raízes de uma função

(a) Faça uma varredura inteira do intervalo $[-10, 10]$ para encontrar pontos em que

$$f(x) = (2x + 1)\sin(\frac{(x + 4)\sqrt{2}}{x + 13})$$

troca de sinal. Use $passo = 1$ e trabalhe no intervalo $[-10, 10]$. Experimente com `gnuplot`, faça o gráfico, para ter uma visão antecipada do que vai acontecer. A condição para testar *trocas de sinal* é

```
 if (f(x)*f(x+delta) <= 0)
           printf(''houve troca de sinal no intervalo\n
[\%f, \%f] \n'', x, x+delta);
```

ou em `Pascal`

```
 if (f(x)*f(x+delta) <= 0) then
writeln(''houve troca de sinal no intervalo ['',x,'','',x+delta,'']'');
```

sugestão estude `exer04_04.gnuplot` que você encontra nas soluções da página.

5. Com a informação obtida nos itens anteriores, faça um esboço gráfico de $y = f(x)$ no intervalo $[-10, 10]$. Para isto use um programa que lhe permita desenho à mão livre, sob `LinuX` você encontra `xfig`. Observe que você pode obter o gráfico de f com `gnuplot` para testar se você usou corretamente as informações, faça isto.

6. Questão discursiva. Defeito do método: O método das tangentes nem sempre funciona como o seguinte exemplo mostra.

   (a) Considere $P(x)$ o polinômio do terceiro grau no gráfico (4) página 8, sabendo que o gráfico de P é tangente ao gráfico das retas

   $$y = x - 3, y = x + 1$$

   obtenha a equação de P.

   (b) Justifique porque o método da tangente não fuciona com $y = P(x)$ no intervalo $[-1, 3]$ em que P troca de sinal.

7. Quando uma função troca de sinal sobre um intervalo $[a, b]$ sendo contínua se anula em algum ponto deste intervalo. O zero da reta secante que passa nos pontos $(a, f(a)), (b, f(b))$ representa outra forma de aproximar o zero da função f.

   (a) Escreva a equação da reta secante que passa nos pontos

   $$(a, f(a)), (b, f(b))$$

   (b) Escreva a expressão do zero desta reta.

   (c) Calcule a_1, o zero desta equação do primeiro grau, no intervalo $[-9, 8] = [a, b]$ com

   $$f(x) = (2x + 1) \sin(\frac{(x + 4)\sqrt{2}}{x + 13}) \tag{2}$$

   e experimente o erro calculando $f(a_1)$. Faça os gráficos.

   (d) Pode ocorrer uma das possibilidades:

   - f troca de sinal no sub-intervalo $[a, a_1]$ ou
   - f troca de sinal no sub-intervalo $[a_1, b]$
   - a_1 ser exatamente o zero de f.

   Suponha a terceira exclúida (tornaria a questão trivial). Chame novamente $[a, b]$ o intervalo em que ocorre a troca de sinal (isto é computação - não é Matemática - discuta porque!). Calcule o ponto a_2 - o zero da nova reta secante. Faça os gráficos.

   (e) O processo descrito no item anterior pode ser iterado produzindo uma sucessão

   $$a_1, a_2, \ldots a_n$$

   que tem por limite o zero exato de f.

   Escreva um programa que calcule esta sucessão até um valor n estipulado por você e verificando em cada passo o valor de $f(a_n)$.

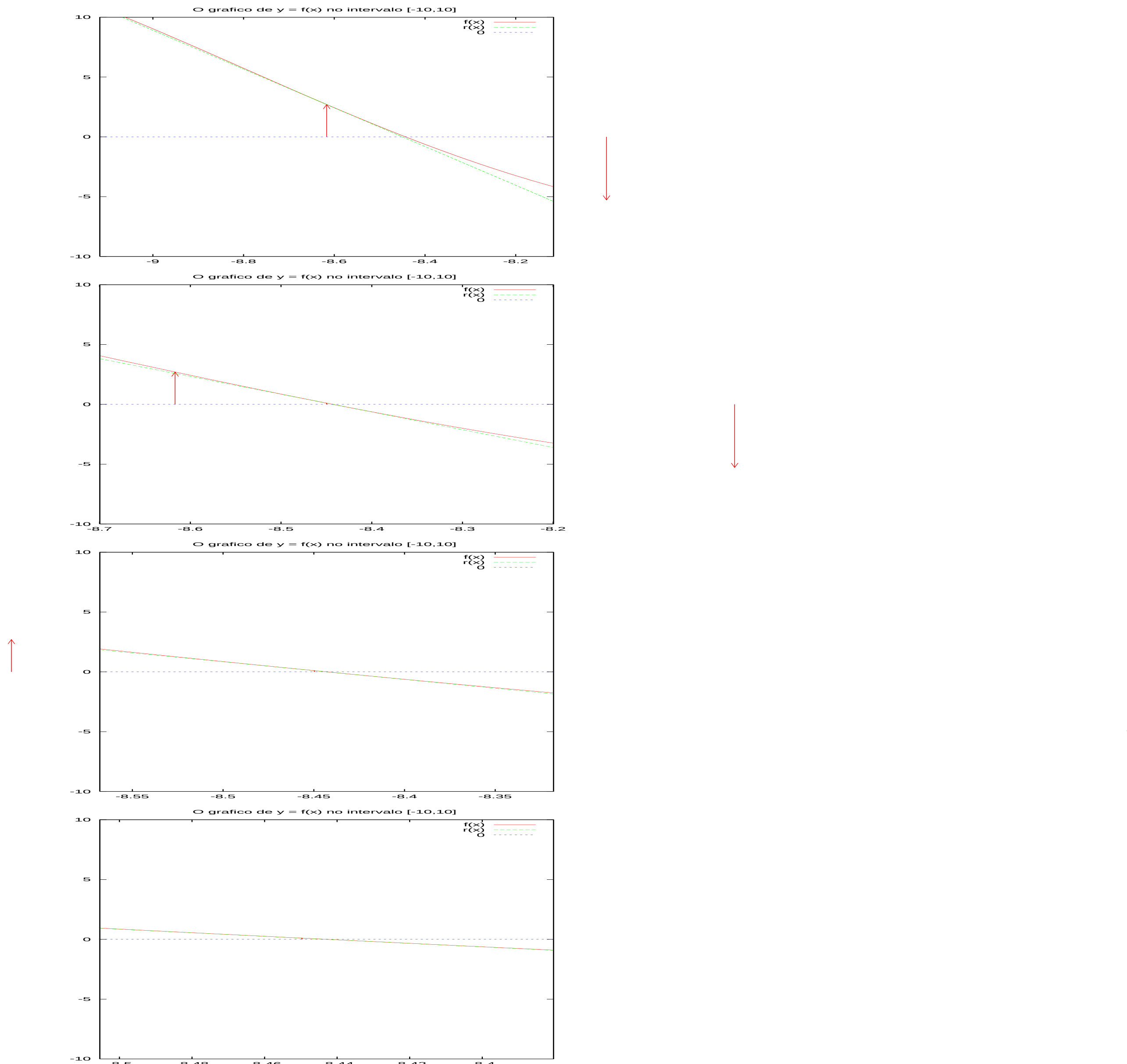

Figura 3: Sucessão de retas tangentes

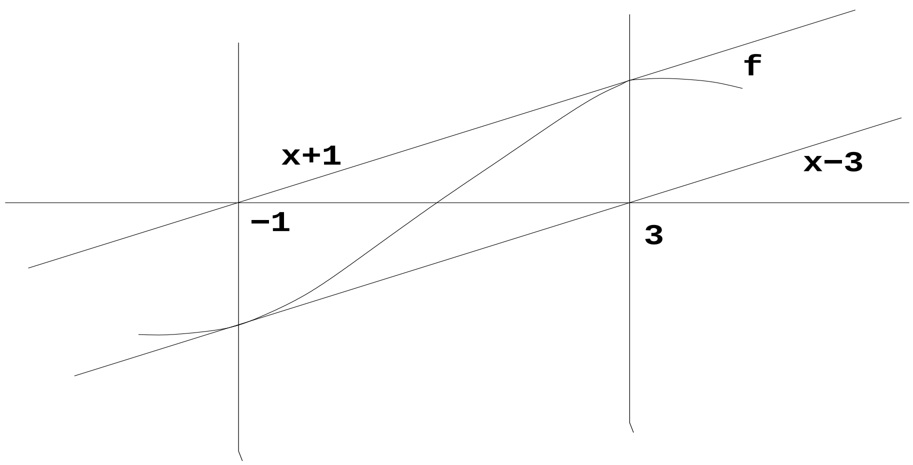

Figura 4: Método da tangente para raízes