

alun@:

Univ. Estadual Vale do Acaraú 10 de junho de 2008
 Documento escrito com L^AT_EX - sis. op. Debian/Gnu/Linux

Por favor, prenda esta *folha de rosto* na sua solução desta lista, deixando-a em branco, caso sua opção for pelo método medieval, ela será usada na correção. Mas dê preferência a escrever um documento eletrônico e entregar na página da disciplina. Escrever em papel gera lixo e agride ao meio ambiente.

1.1 Resumo teórico.

Relembrando: Fórmula de Taylor A equação da reta tangente

$$y = f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) = A + B(x - a) \quad (1.1)$$

é consequência do sistema de equações

$$\begin{cases} P(a) = f(a) \\ P'(a) = f'(a) \end{cases} \quad (1.2)$$

que permite calcular os coeficientes de um polinômio desconhecido

$$P(x) = A + B(x - a) \quad (1.3)$$

para que ele seja tangente ao gráfico da função f no ponto $(a, f(a))$.

$$y = f(a) + f'(a)(x - a) = A + B(x - a) = P(x) \quad (1.4)$$

é a equação de um polinômio do primeiro grau tangente ao gráfico de f . Vamos, nos exercícios, como esta expressão se generaliza para obtermos a equação de um polinômio de grau *qualquer* que é o *melhor polinômio tangente ao gráfico* de f , no ponto $(a, f(a))$ e depois vamos passar ao caso multivariado seguindo a mesma construção, mas agora aparecem as derivadas parciais que formam a derivada de uma função multivariada. O caso inicial é o plano tangente:

$$A_0 = f(a, b) \quad (1.5)$$

$$A_{1,1} = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \quad (1.6)$$

$$A_{1,2} = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \quad (1.7)$$

$$z - A_0 = A_{1,1}(x - a) + A_{1,2}(y - b) \quad (1.8)$$

$$z - f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) \quad (1.9)$$

$$z = f(a, b) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right] \begin{pmatrix} (x - a) \\ (y - b) \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

$$dz = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right] \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

Se você efetuar o último produto de matrizes, vai aparecer a fórmula que os livros de Cálculo chamam de em diferencial total.

É a equação do plano tangente, é um polinômio bivariado do primeiro grau tangente ao gráfico de uma função.

No caso multivariado não passamos do primeiro grau. O comando do **gnuplot** para fazer gráficos de funções de duas variáveis é **splot**.

palavras chave: Polinômio de Taylor multivariado, plano tangente, média aritmética ponderada.

1.2 Polinômio de Taylor

1. Teórica - polinômio do segundo grau tangente Expanda as equações (2), (3) para encontrar as equações de uma parábola (polinômio do segundo grau) tangente ao gráfico de f , *memorizando* também a curvatura (segunda derivada)

$$P(x) = A + B(x - a) + C(x - a)^2 \quad (1.12)$$

Um polinômio desenvolvido¹ no ponto $\underline{x} = \underline{a}$. Observe que você deve determinar os valores dos coeficientes A, B, C de forma adequada.

2. Teórica - polinômio do terceiro grau tangente Expanda as equações (3), (4) para obter as condições que façam de

$$P(x) = A + B(x - a) + C(x - a)^2 + D(x - a)^3 \quad (1.13)$$

um polinômio do terceiro grau, tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$.

Descreva as equações para determinarmos os coeficientes A, B, C, D .

3. Aplicação - Fórmula de Taylor

¹novamente, um polinômio desenvolvido no ponto $\underline{x} = \underline{a}$

- (a) Ache o desenvolvimento de Taylor para $f(x) = \sin(x)$ no ponto $\underline{x} = 0$ de ordem 7 (grau 7) (um polinômio de grau 7).

- (b) Ache o desenvolvimento de Taylor para $g(x) = \cos(x)$ no ponto $\underline{x} = 0$ de ordem 8 (grau 8), (um polinômio de grau 8). Analise porque a diferença de grau entre este item e o anterior.

- (c) Calcule a derivada² de $g(x) + if(x)$, com os polinômios encontrados no item anterior. Verifique que o resultado pode ser interpretado como

$$F'(x) = (g(x) + if(x))' = i(g(x) + if(x)) = iF(x) \quad (1.14)$$

- (d) No Cálculo você viu que existe uma única função com a propriedade $f' = kf$, a derivada é um múltiplo da função. Qual? Conclua por uma conhecida (e famosa) fórmula para a equação (14)

As calculadoras trazem f, g para responder com \sin, \cos quando você aperta o botão destas funções trigonométricas, apenas com um grau um pouco maior do que 8, possivelmente 17.

O programa `exer02_06.calc` resolve esta questão, e você pode encontrá-lo na página no link "programas".

4. Aplicações

- (a) Calcule o valor aproximado de $\sin(0.1)$ usando a fórmula de Taylor de ordem 7. Compare o resultado, indicando o erro ocorrido usando uma calculadora.

- (b) Calcule o valor aproximado de $\cos(0.1)$. Compare o resultado, indicando o erro ocorrido usando uma calculadora.

5. Derivadas parciais introdução teórica A equação de plano que passa no ponto (a, b, c) é, por comparação com a equação da reta,

$$z - c = A(x - a) + B(y - b) \quad (1.15)$$

$$z = c + A(x - a) + B(y - b) \quad (1.16)$$

- (a) Calcule as derivadas parciais de $z = f(x, y)$ na equação (16).

- (b) Justifique a afirmação seguinte usando os conceitos "tangente", "coeficiente angular" dentro de uma pequena redação.

Se o plano cuja equação está em (15), for tangente ao gráfico de uma função no ponto $(a, b, f(a, b))$ então a equação do plano seria, atualizando os valores de c, A, B numa das equações (15) ou (16):

$$z - f(a, b) = A(x - a) + B(y - b) \quad (1.17)$$

$$z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) \quad (1.18)$$

²O número i que aparece na expressão abaixo, é apenas um número complexo, e as contas funcionam com eles como com qualquer número real, sem preconceitos ou complexos...

- (c) Considere uma função

$$z = f(x, y) \quad (1.19)$$

que seja derivável numa vizinhança do ponto $(a, b, f(a, b))$. Então ela tem um plano tangente³ no ponto $(a, b, f(a, b))$, semelhante ao caso da função univariada com a reta tangente. Identifique entre as equações a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(a, b, f(a, b))$ e justifique sua escolha.

- (d) Sabendo que as taxas de variação parciais de $z = f(x, y)$ no ponto (1, 2) são

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3$$

e que $f(1, 2) = -5$

- i. Escreva a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 2, f(1, 2))$

- ii. calcule aproximadamente

$$f(1.1, 2.1)$$

- (e) Fórmula de Taylor multivariada de grau 1 Observe que a equação do plano tangente pode ser escrita de forma semelhante à equação da reta tangente. Encontre as semelhanças e escreva a *fórmula de Taylor multivariada de grau 1*. Você vai precisar de um produto de matrizes (já ouviu falar do gradiente, da jacobiana?). Em suas justificativas use estas palavras, gradiente, jacobiana.

6. Polinômio Esta é uma variante do método *polinômio de Taylor*. Podemos encontrar um polinômio que memoriza as informações de uma função de forma parecida com o polinômio de Taylor, mas usando informações em dois pontos.

- (a) Encontre um polinômio P desenvolvido no ponto $\underline{x} = \underline{a}$ tal que

- $P(a) = f(a); P'(a) = f'(a)$
- $P(b) = f(b); P'(b) = f'(b)$

em que $[a, b]$ é um intervalo em que f está definida e é derivável. Sugestão: escreva a expressão de um polinômio desenvolvido no ponto $\underline{x} = \underline{a}$.

- (b) Aplicação Encontre polinômios tal que

a)	$P(-3) = 3$	$P'(-3) = -1$
	$P(3) = 1$	$P'(3) = 1$

³Esta afirmação equivale a dizer que f é derivável, como no caso univariado dizer que tem uma reta tangente equivale a dizer que função é derivável

b)	$P(-3) = -3$	$P'(-3) = 1$
	$P(3) = -3$	$P'(3) = 1$

Faça os gráficos destes polinômios.

- (c) Média aritmética ponderada Tudo que sabemos sobre uma função contínua

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R} \quad (1.20)$$

é que $f(a) = -3; f(b) = 9$. Suponha além disto que $a < 0 < b$. Decida quais das afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas justificando a sua decisão:

- i. f pode nunca se anular no intervalo $[a, b]$;
- ii. em algum ponto $c \in (a, b)$ temos $f(c) = 0$;
- iii. $f(0) = 0$;
- iv. uma boa hipótese⁴ para o valor $f(0)$ é

$$\frac{f(b) + f(a)}{2};$$

- v. uma boa hipótese para o valor $f(0)$ é

$$sf(b) + tf(a); s = \frac{-a}{b-a}; t = \frac{b}{b-a};$$

- vi. uma boa hipótese para o valor $f(0)$ é

$$sf(a) + tf(b); s = \frac{-a}{b-a}; t = \frac{b}{b-a};$$

- vii. A integral de f é positiva;
- viii. A integral de f pode ser positiva;
- ix. A integral de f pode ser negativa;
- x. A integral de f é negativa;
- xi. Em algum ponto $c \in (a, b)$ tem-se

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

- xii. Se f for uma função diferenciável, em algum ponto $c \in (a, b)$ tem-se

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

- (d) Valor experimental Você selecionou na questão anterior, por alguma razão, um dos itens

- i. uma boa hipótese para o valor $f(0)$ é

$$sf(b) + tf(a); s = \frac{-a}{b-a}; t = \frac{b}{b-a};$$

- ii. uma boa hipótese para o valor $f(0)$ é

$$sf(a) + tf(b); s = \frac{-a}{b-a}; t = \frac{b}{b-a};$$

Faça o gráfico de f , escolha a função, o intervalo, use `gnuplot` e experimente as duas hipóteses, analise a decisão que você tomou anteriormente eventualmente alterando-a. Justifique a sua decisão.

⁴Discuta com o professor o significado de "hipótese", será uma verdade, pode ser um axioma.