

| | |
|--------------------------------|-------------------------|
| Cálculo Numérico Computacional | Solução da lista 02 |
| Polinômio de Taylor | tarcisio@member.ams.org |
| T. Praciano-Pereira | Dep. de Matemática |
| Univ. Estadual Vale do Acaraú | 28 de junho de 2008 |

1 Introdução

Esta solução da lista 02 não corresponde exatamente à arrumação da lista e deve ser considerada como um auxílio resumido (apoio) à sua solução da lista.

palavras chave: Polinômio de Taylor, média aritmética ponderada, valor intermediário.

2 Exercícios

Exercícios 1 Polinômio de Taylor

Solução 1 *Teórica - polinômio do segundo grau tangente* Expanda as equações (0), (0) para encontrar as equações de uma parábola (polinômio do segundo grau) tangente ao gráfico de f , memorizando também a curvatura (segunda derivada)

$$P(x) = A + B(x - a) + C(x - a)^2 \quad (1)$$

Um polinômio desenvolvido¹ no ponto $\underline{x = a}$. Observe que você deve terminar os valores dos coeficientes A, B, C de forma adequada.

Esta questão generaliza (um pouco) a reta tangente ao gráfico de uma função f no ponto $(a, f(a))$. A reta tangente tem duas informações:

- o valor da reta no ponto $x = a$ que é $f(a)$
- o coeficiente angular da reta, que coincide com o coeficiente angular instantâneo de f , no ponto $x = a$ que é $m = f'(a)$. Agora queremos que uma parábola tangente o que nos leva a discutir a segunda derivada do polinômio na equação (1).

Completando as equações que tinhamos para a reta tangente: (Dados errados)

$$A = f(a) \quad (2)$$

$$B = f'(a) \quad (3)$$

$$C = f''(a) \quad (4)$$

entretanto a última equação está errada, seria uma solução ingênua para o problema simplesmente usar a segunda derivada para obter o coeficiente \underline{C} . O que devemos ter é (Dados corretos)

$$P(a) = f(a) \quad (5)$$

$$P'(a) = f'(a) \quad (6)$$

$$P''(a) = f''(a) \quad (7)$$

¹novamente, um polinômio desenvolvido no ponto $\underline{x = a}$

que significam

- o valor do polinômio P no ponto $x = a$ coincide com o valor de f neste ponto;
- a derivada do polinômio P no ponto $x = a$ coincide com a derivada de f neste ponto;
- a curvatura do polinômio P no ponto $x = a$ coincide com a curvatura de f neste ponto;

e as contas para obter o terceiro coeficiente são:

$$P''(x) = 2C = f''(a) \Rightarrow C = \frac{f''(a)}{2} \quad (8)$$

portanto

$$P(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 \quad (9)$$

é o polinômio de Taylor de segundo grau, para f , desenvolvido no ponto $x = a$.

O programa `exer02.01.gnuplot` que pode ser encontrado na página da disciplina (link programas) faz o gráfico de uma função definida no programa e seu polinômio Taylor de segundo grau num ponto escolhido. Se quiser trocar a função, não se esqueça de calcular novamente as derivadas. O programa `exer02.01_err.gnuplot` está errado, mas o erro está explicado e mostra como podemos verificar o erro usando um gráfico com `gnuplot`. Este programa-errado também pode ser encontrado no mesmo link, na página.

Solução 2 *Teórica - polinômio do terceiro grau tangente* Expanda as equações (0), (0) para obter as condições que façam de

$$P(x) = A + B(x - a) + C(x - a)^2 + D(x - a)^3 \quad (10)$$

um polinômio do terceiro grau, tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$.

Descreva as equações para determinarmos os coeficientes A, B, C, D .

É semelhante à questão anterior, apenas agora temos

$$P(a) = f(a) \quad (11)$$

$$P'(a) = f'(a) \quad (12)$$

$$P''(a) = f''(a) \quad (13)$$

$$P'''(a) = f'''(a) \Rightarrow P'''(a) = 6D \Rightarrow D = \frac{f'''(a)}{6} \quad (14)$$

o que conduz à expressão

$$P(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{6}(x - a)^3 \quad (15)$$

Como você pode ver em [?, capítulo 1], usando fatorial torna esta expressão mais interessante:

$$P(x) = \frac{f(a)}{0!} + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 \quad (16)$$

que sugere a fórmula geral do Polinômio de Taylor de grau n :

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \quad (17)$$

com a observação de que a derivada de ordem zero é o próprio valor da função.

Solução 3 Fórmula de Taylor A fórmula de Taylor tem um valor prático relativamente limitado porque exige uma grande quantidade de informação muito especializada, derivada de ordem alta, em um único ponto. Quando esta informação existir podemos fazer um uso significativo da fórmula de Taylor. É o que acontece com as funções sen , cos das quais conhecemos todas as derivadas em alguns pontos, isto nos permite escrever polinômios de Taylor de grau elevado em qualquer um destes pontos.

1. Ache o desenvolvimento de Taylor para $f(x) = \text{sen}(x)$ no ponto $\underline{x=0}$ de ordem 7 (grau 7) (um polinômio de grau 7).

Vamos usar o ponto zero onde as derivadas do sen são

$$0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots$$

sendo o primeiro valor a derivada de ordem zero no ponto zero, portanto $\text{sen}(0)$ e os seguintes as derivadas sucessivas também no zero. Podemos escrever o desenvolvimento de Taylor (polinômio de Taylor) no ponto $x=0$ como

$$\sin(x) \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots - \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \quad (18)$$

O sinal de aproximação está sendo usado em vez de igualdade porque nenhum polinômio será igual ao sen , que é uma de série de Taylor. Um polinômio de Taylor é um valor aproximado desta série e tem validade em volta do ponto, como aproximação. Quanto mais alto for o grau, maior a validade da aproximação. Como sen , cos são funções periódicas, isto pode ser utilizado para obter o valor destas funções, com grande precisão, na reta inteira usando polinômio de grau relativamente pequeno, por exemplo, de grau 15 o erro é da ordem de 0.0001 (verificar este erro).

2. Ache o desenvolvimento de Taylor para $g(x) = \text{cos}(x)$ no ponto $\underline{x=0}$ de ordem 8 (grau 8), (um polinômio de grau 8). Analise porque a diferença de grau entre esta questão e anterior.

As derivadas do cos no ponto zero são

$$1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \dots$$

para $n=0$ temos a derivada de ordem zero 1 então as derivadas diferentes de zero, agora, são as derivadas de ordem par o que nos dá um polinômio par, todos os coeficientes envolvidos são pares:

$$\cos(x) \approx \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \quad (19)$$

Uma série de potências (que é a generalização de um polinômio por que tem por termo geral o monômio $a_k(x-a)^k$) converge num disco em volta do ponto $x=a$ e o raio deste disco de convergência depende do comportamento no infinito dos coeficientes, o limite pode não existir mas a sucessão dos polinômios for limitada, por exemplo, então podemos calcular o raio do disco de convergência. Você encontra isto em qualquer livro de Cálculo Avançado, por exemplo em [?].

Neste caso a sucessão dos coeficientes é limitada o que conduz a um raio de convergência infinito, quer dizer que a série de Taylor converge para qualquer ponto da reta. Em termos práticos isto adianta pouco, e neste caso se usa uma aproximação, é o que se encontra programado dentro das calculadoras, possivelmente um polinômio de Taylor de grau 13 ou 14.

3. Calcule a derivada² de $g(x) + if(x)$, com os polinômios encontrados no item anterior. Será que o resultado poderia ser interpretado como sendo

$$(g(x) + if(x))' = i(g(x) + if(x))$$

Podemos verificar as propriedades da derivada do sen e do cos usando a fórmula de Taylor sob a hipótese de que ela converge (o raio de convergência é infinito) neste caso vale

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k f_k(x)\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k f_k'(x) \quad (20)$$

a derivada da série é a série das derivadas, (não podemos mais falar de soma).

Consequentemente temos:

²O número i que aparece na expressão abaixo, é apenas um número complexo, e as contas funcionam com eles como com qualquer número real, sem preconceitos ou complexos...

$$\sin(x)' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right)' = \quad (21)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k} = \quad (22)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = \cos(x) \quad (23)$$

$$\cos(x)' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \right)' = \quad (24)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} 2k \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k-1} = \quad (25)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)!} x^{2k-1} = \quad (26)$$

$$= - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)!} x^{2k-1} = \quad (27)$$

$$= - \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right) = -\sin(x) \quad (28)$$

@ leitor@ é convidad@ a verificar cuidadosamente as contas e eu peço a gentileza de me informar se eu cometi algum erro o que não é de todo improvável. Afinal, é para isto que servem os leitores, para criticar os autores. A gente escreve e os leitores verificam, um trabalho de equipe. Eu não tenho tempo de verificar o que escrevo!

Como esta séries são convergentes, a soma delas também é convergente com mesmo raio de convergência, ∞ , e como elas são uma dentadura com falta de dentes³ numa, a outra tem... o resultado da soma multiplicando uma delas pelo número i é

$$e(x) = \cos(x) + i \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \quad (29)$$

cuja derivada, pelos cálculos feitos da equação (21) até a equação (27), é

$$e'(x) = -\sin(x) + i \cos(x) = i(\sin(x) + \cos(x)) = ie(x)$$

Ora, a única função que tem a propriedade $f'(x) = af(x)$ é a exponencial

$$f(x) = e^{ax}$$

aqui com $a = i$ portanto

$$e(x) = e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$$

que é a fórmula de Euler.

³na literatura o habitual é dizer que são séries desfalçadas, como são desfalçadas algumas dentaduras...faltando numa exatamente o coeficiente que tem na outra

Solução 4 Aplicações

1. Calcule o valor aproximado de $\sin(0.1)$ usando a fórmula de Taylor de ordem 7. Compare o resultado, indicando o erro ocorrido usando uma calculadora.

O valor do sen em uma vizinhança do ponto $x = 0$ pode ser obtido, aproximadamente, usando-se um polinômio de Taylor desenvolvido no ponto $x = 0$. Então

$$\sin(x) \approx P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \quad (30)$$

$$\sin(0.1) \approx P(0.1) = 0.09983341664682539683 \quad (31)$$

$$\cos(0.1) \approx Q(0.1) = 0.99500416527802579365 \quad (32)$$

Os valores foram calculados o programa `exer02_06.calc` que pode ser encontrado em [?]. Observe também que foi usado o desenvolvimento do seno e do cosseno no ponto $x = 0$ e não no ponto $x = 0.1$, insistindo, no ponto $x = 0.1$ nós sabemos nada, usamos as informações abundantes que temos sobre estas funções no ponto $x = 0$ para calcula aproximadamente o seu valor no ponto $x = 0.1$.

Na ausência de um interpretador para `calc`, experimente usar o programa o texto do programa (o código fonte)

```
exer02_06.calc
```

para criar um programa `exer02_06.gnuplot` e fazer o `gnuplot` calcular os valores aproximados.

Fazer esta tradução é um bom exercício de computação, eu vou criar `exer02_06.gnuplot` mas tente fazer você sozinho e depois apenas comparar ou dar olhadas rápidas na minha solução para guiá-lo a fazer a sua.

Se você não ficar independente nunca irá criar nada, mas é justo, é razoável, é importante fazer consulta. Também é um direito seu.

2. Calcule o valor aproximado de $\cos(0.1)$. Compare o resultado, indicando o erro ocorrido usando uma calculadora.

Feito acima com o programa `exer02_06.calc`, ver [?].

Solução 5 Derivadas parciais introdução teórica A equação de plano que passa no ponto (a, b, c) é, por comparação com a equação da reta,

$$z - c = A(x - a) + B(y - b) \quad (33)$$

$$z = c + A(x - a) + B(y - b) \quad (34)$$

1. Calcule as derivadas parciais de $z = f(x, y)$ na equação (34).

As derivadas parciais são os coeficientes:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = A; \frac{\partial f}{\partial y} = B;$$

2. Justifique a afirmação seguinte usando os conceitos “tangente”, “coeficiente angular” dentro de uma pequena redação.

Se o plano cuja equação está em (33), for tangente ao gráfico de uma função no ponto $(a, b, f(a, b))$ então a equação do plano seria, atualizando os valores de c, A, B numa das equações (33) ou (34):

$$z - f(a, b) = A(x - a) + B(y - b) \quad (35)$$

$$z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - b) \quad (36)$$

Dizer que uma função tem derivada significa que dizer que o seu gráfico tem um objeto linear tangente.

Porque escolhemos um objeto linear tangente para falar de derivada? a razão é que os objetos lineares, retas, planos, tem coeficientes angulares constantes. Quando uma reta for tangente ao gráfico de uma função univariada, ele descreve o coeficiente angular instantâneo, da função, naquele ponto.

Você pode visualizar planos com `gnuplot` e inclusive rodá-lo usando o ratinho.

```
z - 3 = 4*(x-3) + 7*(y - 2)
f(x,y) = 3 + 4*(x-3) + 7*(y - 2)
splot f(x,y), 0
```

como sempre, temos que definir uma função, `gnuplot` não sabe o que fazer com a equação $z - 3 = 4 * (x - 3) + 7 * (y - 2)$.

3. Plano tangente Considere uma função

$$z = f(x, y) \quad (37)$$

que seja derivável numa vizinhança do ponto $(a, b, f(a, b))$. Então ela tem um plano tangente⁴ no ponto $(a, b, f(a, b))$, semelhante ao caso da função univariada com a reta tangente. Identifique entre as equações (35), (36) a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(a, b, f(a, b))$ e justifique sua escolha.

Na questão original tem um erro, faltou aparecer os números das equações (35), (36).

⁴Esta afirmação equivale a dizer que f é derivável, como no caso univariado dizer que tem uma reta tangente equivale a dizer que função é derivável

A equação que representa o plano tangente ao gráfico da função $z = f(x, y)$ no ponto $(a, b, f(a, b))$ é a equação (36), porque nela estão expressos o ponto em que passa o plano, $(a, b, f(a, b))$ e os coeficientes angulares escritos na forma das derivadas parciais de f .

A equação

$$z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - b) \quad (38)$$

$$z = f(a, b) + \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{array} \right] \cdot \left(\begin{array}{c} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{array} \right) \quad (39)$$

generaliza a equação da reta tangente

$$y = f(a) + f'(a)(x - a) \equiv \quad (40)$$

$$y - f(a) = dy = f'(a)dx \quad (41)$$

na equação (39) você tem um produto de matrizes que é equivalente a um produto escalar de vetores o que torna o resultado um número:z.

4. Plano tangente Sabendo que as taxas de variação parciais de $z = f(x, y)$ no ponto $(1, 2)$ são

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2; \frac{\partial f}{\partial y} = 3$$

e que $f(1, 2) = -5$ escreva a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 2, f(1, 2))$

Queremos a equação de um plano tangente ao gráfico de uma função f cuja equação não conhecemos, mas sabemos que suas derivadas parciais são 2 e 3, relativamente a x e a y , respectivamente, e que $f(1, 2) = -5$

Basta aplicar a equação (39), desde que saibamos o que estamos fazendo:

$$z - f(1, 2) = \frac{\partial f}{\partial x}(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - 2) \equiv z + 5 = 2(x - 1) + 3(y - 2)$$

5. calcule aproximadamente

$$f(1.1, 2.1)$$

A equação de um plano tangente (ou da reta tangente) são instâncias do polinômio de Taylor, de grau 1, portanto servem para obtermos valores aproximados de uma função (quando não sabemos a equação, como é o caso seno e do cosseno) nas vizinhanças de um ponto onde temos informações. Aqui sabemos alguma coisa sobre f no ponto $(1, 2)$ e vamos calcular aproximadamente $f(1.1, 2.1)$:

$$f(1.1, 2.1) \approx f(1, 2) + 2(1.1 - 1) + 3(2.1 - 2) = -5 + 2(1.1 - 1) + 3(2.1 - 2) = -4.5$$

6. Fórmula de Taylor multivariada de grau 1 Observe que a equação do plano tangente pode ser escrita de forma semelhante á equação da reta tangente. Encontre as semelhanças e escreva a fórmula de Taylor multivariada de grau 1. Você vai precisar de um produto de matrizes (já ouviu falar do gradiente, da jacobiana ?). Em suas justificativas use estas palavras, gradiente, jacobiana.

Solução 6 Polinômio Esta é uma variante do método polinômio de Taylor. Podemos encontrar um polinômio que memoriza as informações de uma função de forma parecida com o polinômio de Taylor, mas usando informações em dois pontos.

1. Encontre um polinômio P desenvolvido no ponto $x = a$ tal que

- $P(a) = f(a); P'(a) = f'(a)$
- $P(b) = f(b); P'(b) = f'(b)$

em que $[a, b]$ é um intervalo em que f está definida e é derivável. Sugestão: escreva a expressão de um polinômio desenvolvido no ponto $x = a$.

Temos que resolver o sistema de equações

$$P(x) = A + B(x - a) + C(x - a)^2 + D(x - a)^3 \quad (42)$$

$$P(a) = A = f(a) \quad (43)$$

$$P'(a) = B = f'(a) \quad (44)$$

$$P(b) = f(a) + f'(a)(b - a) + C(b - a)^2 + D(b - a)^3 = f(b) \quad (45)$$

$$P'(b) = f'(a) + 2C(b - a) + 3D(b - a)^2 = f'(b) \quad (46)$$

$$\begin{cases} f(a) + f'(a)(b - a) + C(b - a)^2 + D(b - a)^3 = f(b) \\ f'(a) + 2C(b - a) + 3D(b - a)^2 = f'(b) \end{cases} = f(b) \quad (47)$$

$$\begin{cases} C(b - a)^2 + D(b - a)^3 = f(b) - (f(a) + f'(a)(b - a)) \\ 2C(b - a) + 3D(b - a)^2 = f'(b) - f'(a) \end{cases} \quad (48)$$

$$\begin{bmatrix} (b - a)^2 & (b - a)^3 \\ 2(b - a) & 3(b - a)^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(b) - f(a) - f'(a)(b - a) \\ f'(b) - f'(a) \end{pmatrix} \quad (49)$$

2. Aplicação Encontre polinômios tal que

| | |
|----------------|---------------|
| $a) P(-3) = 3$ | $P'(-3) = -1$ |
| $P(3) = 1$ | $P'(3) = 1$ |

Na questão anterior conseguimos a expressão formal de um sistema de equações, a expressão matricial. Vamos agora usar o `scilab` [?], para resolver este sistema de equações. A sintaxe do `scilab` é semelhante a do `gnuplot` ou do `calc` e infelizmente você encontra uma versão deste incrível pacote também para windows.

Onde escrevemos $f(a), f'(a), f(b), f'(b)$ vamos agora os valores que se encontram expressos na tabela:

$$a = -3; b = 3 \quad (50)$$

$$f(a) = 3; f'(a) = -1; f(b) = 1; f'(b) = 1; \quad (51)$$

$$R_1 = f(b) - f(a) - f'(a)(b - a) = 1 - 3 - 1(b - a); \quad (52)$$

$$R_2 = f'(b) - f'(a) = 1 - (-1); \quad (53)$$

$$M_{11} = (b - a)^2; M_{12} = (b - a)^3; M_{21} = 2(b - a); M_{22} = 3(b - a)^2 \quad (54)$$

Vamos definir estas matrizes no `scilab` e pedir que ele resolva o sistema. Mesmo sendo um sistema pequeno, fácil de resolver à mão, vamos usar o `scilab` para induzi-lo na prática deste programa, isto será necessário para sistema maiores que encontraremos pela frente. Veja o código do `scilab`

```
a = -3
b = 3

M=[(b-a)**2, (b-a)**3; 2*(b-a), 3*(b-a)**2]
R = [1- 3 - (b-a); 1 - (-1)]

-->a = -3
a =

- 3.

-->b = 3
b =

3.

-->
-->M=[(b-a)**2, (b-a)**3; 2*(b-a), 3*(b-a)**2]
M =

36.    216.
12.    108.

-->R = [1- 3 - (b-a); 1 - (-1)]
R =

- 8.
2.

-->M\R <<<< este é comando do scilab para resolver sistemas
ans =

- 1.
0.1296296

Achamos os coeficientes C, D podemos agora jogar estes dados no gnuplot

a=-3;b=3
A=3.0; B=-1.0; C=-1.0; D=0.1296296;
P(x) = A + B*(x-a) + C*(x-a)**2 + D*(x-a)**3
set xrange [-4;4]
set terminal postscript portrait enhanced color
set output 'exer02_01_01.eps'
plot P(x) ,0
```

O resultado é o gráfico do polinômio na figura (2) página 15.

| | |
|-----------------|--------------|
| $b) P(-3) = -3$ | $P'(-3) = 1$ |
| $P(3) = -3$ | $P'(3) = 1$ |

Semelhante ao anterior.

Faça os gráficos destes polinômio.

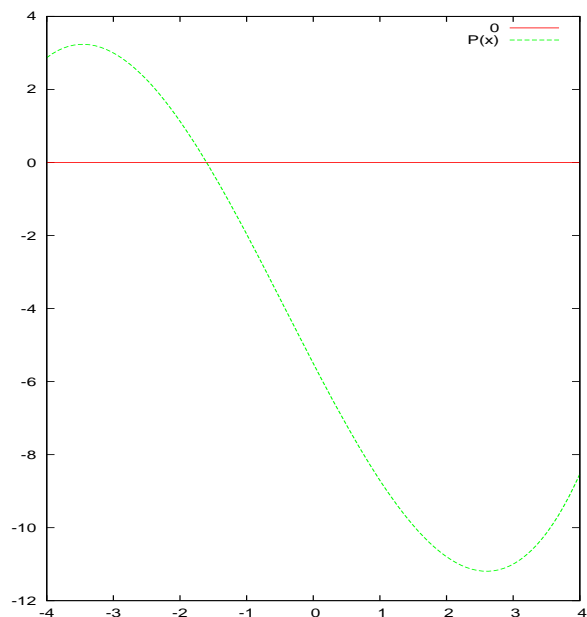


Figura 1: Gráfico de polinômio com os dados da tabela

Solução 7

Média aritmética ponderada Tudo que sabemos sobre uma função contínua

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R} \quad (55)$$

é que $f(a) = -3; f(b) = 9$. Suponha além disto que $a < 0 < b$. Decida quais das afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas justificando a sua decisão:

1. f pode nunca se anular no intervalo $[a, b]$ é falso porque como a função é contínua e tem sinais opostos nos extremos do intervalo, então ela terá que passar pelo zero (um valor intermediário) em algum ponto $c \in [a, b]$.

O teorema do valor intermediário diz que se f for contínua no intervalo $[a, b]$ e se M for máximo de f , e m for o mínimo de f neste intervalo, qualquer valor $P \in [m, M]$ é atingido em algum ponto $c \in [a, b]$, ou ainda

existe $c \in [a, b]$ tal que

$$f(c) = P$$

Embora seja fácil de compreender, o teorema do valor intermediário é um dos teoremas difíceis de se demonstrar. É um exemplo de afirmação intuitiva que é muito difícil de ser provada.

Ao mesmo tempo é um resultado muito útil.

2. em algum ponto $c \in (a, b)$ temos $f(c) = 0$ verdadeira como está explicado no item anterior.
3. $f(0) = 0$, falso o ponto $c \in [a, b]$ em que a função se anula não precisa ser o zero.
4. uma boa hipótese para o valor $f(0)$ é

$$\frac{f(b) + f(a)}{2}$$

falso, pode ser uma hipótese mas não tem uma razão plausível que a justifique. Não havendo outras justificativas a melhor média não é a média aritmética e sim a media aritmética ponderada em que pesos adequados corrigem o valor intermediário. Veja os próximos itens.

5. uma boa hipótese para o valor $f(0)$ é

$$sf(b) + tf(a); \quad s = \frac{-a}{b-a}; \quad t = \frac{b}{b-a};$$

Correto, esta é uma boa hipótese, os números s, t são dois números positivos cuja soma é igual a 1, são dois pesos, servem para calcular uma média aritmética ponderada.

A escolha do peso adequado para cada um dos valores deve estar associado a proximidade do valor com o ponto onde ele for calculado.

As duas médias

$$M_1 = sf(b) + tf(a); \quad M_2 = tf(b) + sf(a)$$

determinam um ponto sobre a reta que liga os pontos

$$P_2 = (a, f(a)) \quad P_1 = (b, f(b))$$

Entretanto, veja o gráfico na figura (2) página 15, que justifica porque o peso maior deve estar associado ao valor que estiver mais próximo do ponto que desejarmos sobre a reta.

6. uma boa hipótese para o valor $f(0)$ é

$$sf(a) + tf(b); \quad s = \frac{-a}{b-a}; \quad t = \frac{b}{b-a};$$

Falso veja a justificativa do item anterior.

7. A integral de f é positiva; Nem falso nem verdadeiro, não há condições de verificar.
8. A integral de f pode ser positiva; Verdadeiro por causa do condicional “pode”.
9. A integral de f pode ser negativa; Verdadeira por causa do condicional “pode”.
10. A integral de f é negativa; Nem falso nem verdadeiro, não há condições de verificar.
11. Em algum ponto $c \in (a, b)$ tem-se

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Falso, este é o teorema do valor médio para a derivada, é falso porque não há hipótese de que f seja derivável.

12. Se f for uma função diferenciável, em algum ponto $c \in (a, b)$ tem-se

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Verdadeiro, este é o teorema do valor médio para a derivada, é verdadeiro devido a hipótese de que f seja derivável.

Solução 8 Valor experimental Você selecionou na questão anterior, por alguma razão, um dos itens

1. uma boa hipótese para o valor $f(0)$ é

$$sf(b) + tf(a); s = \frac{-a}{b-a}; t = \frac{b}{b-a}; \quad (56)$$

2. uma boa hipótese para o valor $f(0)$ é

$$sf(a) + tf(b); s = \frac{-a}{b-a}; t = \frac{b}{b-a}; \quad (57)$$

Faça o gráfico de f , escolha a função, o intervalo, use `gnuplot` e experimentalmente as duas hipóteses, analise a decisão que você tomou anteriormente eventualmente alterando-a. Justifique a sua decisão.

As somas que aparecem nas equações (56), (57) são médias aritméticas ponderadas. Os números s, t , em ambas as equações, são positivos e a soma deles é um, tais números se chamam pesos.

O programa `exer02_01.gnuplot` que pode ser encontrado em [?] simula, graficamente, este valor médio.

Se definirmos a equação da reta que passa nos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ temos:

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (58)$$

$$g(x) = f(b) + m(x - b) \quad (59)$$

$$g(0) = f(b) - mb = f(b) - b \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f(b) - \frac{bf(b) - bf(a)}{b - a} \quad (60)$$

$$g(0) = \frac{f(b)(b-a)}{b-a} - \frac{bf(b) - bf(a)}{b-a} = \frac{f(b)(b-a) - bf(b) + bf(a)}{b-a} \quad (61)$$

$$g(0) = \frac{-af(b) + bf(a)}{b-a} = \frac{-a}{b-a} f(b) + \frac{b}{b-a} f(a) \quad (62)$$

$$g(0) = tf(a) + sf(b); t = \frac{b}{b-a}; s = \frac{-a}{b-a} \quad (63)$$

Esta questão mostra que o valor proporcional entre dois valores dados que não sejam equidistantes, deve ser obtido usando as distâncias reversas dos pontos extremos: o peso de $f(a)$ deve ser $\frac{b}{b-a}$ e o peso de $f(b)$ deve ser $\frac{-a}{b-a}$.

Numa situação mais geral, em que simplesmente considerarmos o intervalo $[a, b]$ sem nenhuma hipótese sobre os sinais dos extremos a, b e um ponto $p \in [a, b]$, veja a figura (2) página 15, o pesos s, t vão representar a representatividade relativa do ponto p no intervalo $[a, b]$ em relação a cada um dos extremos. Se o ponto p estiver mais próximo do extremo a o peso de $f(a)$ vai deve ser maior sendo portanto

$$t = \frac{b-p}{b-a} > \frac{p-a}{b-a} = s$$

Se $p = 0$ vamos encontrar os valores s, t que calculamos acima.

Conclusão é a equação (56) que representa a hipótese adequada (proporcional), ou ainda a interpolação linear entre os valores $f(a), f(b)$.

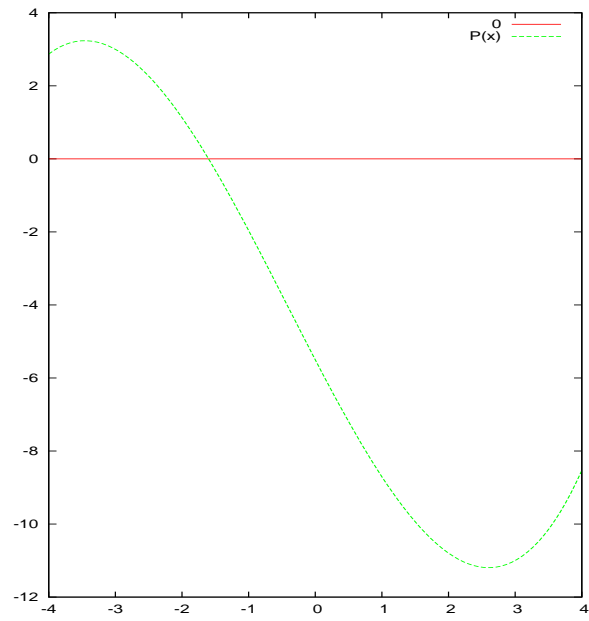


Figura 2: Valor médio entre dois pontos dados