Cálculo Numérico "Computacional"	**ap 02**
assunto: palavras chave	tarcisio@member.ams.org
T. Praciano-Pereira	**Dep. de Matemática**
alun@:	
Univ. Estadual Vale do Acaraú	1 de setembro de 2008
Documento escrito com LaTeX	- sis. op. Debian/Gnu/Linux

2 Informações

Por favor, se você usar o método medieval para entrega desta lista, em papel, prenda esta *folha de rosto* devidamente preenchida com o seus dados. Ela será usada na correção. Se você quiser entregar o trabalho eletrônicamente, envie-o para o meu e-mail ou entregue-o em CD na secretaria do Curso de Matemática.

Por favor , siga as instruções sobre nomes de arquivos. Observe a denominação correta para o arquivo, *letra minúscula, sem espaços, sem acentuação, com o formato:*

`cnum_seu-e-mail_ap02.pdf`

tudo com letra minúscula.

Não se esqueça de colocar o seu nome e seu e-mail dentro do trabalho, assim como os nomes e e-mails dos demais membros da equipe.

Data da entrega do trabalho: dia 05 de Setembro, sexta-feira. Data da publicação das notas, segunda-feira, dia 08 de Setembro. Nenhum trabalho será aceito, por nenhum motivo, fora da data marcada, até mesmo porque na próxima sexta-feira começaresmo o AP03, que deve finalizar no dia 12. Se organize para cumprir com a data.

Se o trabalho for feito em equipe, *é suficiente uma única cópia para a toda a equipe.* Limite do número de participantes por equipe: 03. Equipes com mais três alunos serão vistas negativamente e é preciso entrar em contacto comigo para justificar o tamanho da equipe.

3 Orientação

As questões são de múltipla escolha. Para que você tenha os pontos de uma questão é necessário selecionar **todas** as opções corretas e escrever uma justificativa da sua escolha. Se você selecionar apenas parte das alternativas corretas ou se não oferecer uma justificativa bem elaborada, você perde os pontos da questão.

A justificativa, em alguns casos, pode ser um programa com sua saída de dados, um gráfico do gnuplot, por exemplo. Nestes casos um arquivo texto deve ser anexado ao trabalho para que eu possa verificar a correção do programa. Mesmo assim é necessário os seus comentários sobre o gráfico ou sobre o programa.

Desta forma se evitam "chutes" e se conduz @ estudante a fazer pequenas redações que @ conduzem a pensar e portanto uma compreensão em profundidade do assunto.

Por outro lado, a liberdade com que o trabalho será feito é total, com consultas ou comparações entre os trabalhos dos colegas, ao professor, a livros ou sites na Internet, ou experimentos com programas de computador. Quem desejar aprender tem aqui uma oportunidade. O objetivo do trabalho é o de oferecer-lhe meios experimentais para entender a matéria, a avaliação é apenas uma forma de incentivá-l@ a se debruçar nas experiências e leituras.

objetivo: Aplicação das técnicas do Cálculo Numérico para análise de problemas da vida real.

palavras chave: aproximação polinomial, raíz aproximada, derivada aproximada, aplicações, curva de nível.

4 Aproximação polinomial

1. Curva de nível, aproximação de

   O programa `ap02_01.calc` foi usado para produzir esta questão e pode ser baixado da página junto com este trabalho.

   Considere a função

   $$z = F(x, y) = x^2 - 3x^2y + y^3 - 5 \tag{1}$$

   (a) (V)[ ](F)[ ] Dentro de um programa onde esteja definida a função F, o código seguinte,

```
x = inicioX;
while( x < fimX)  {
y = inicioY;
        while( y < fimY)  {
                if ( abs(F(x,y)) < precisao ) {
                        write( x,y);
                }
                y = y +delta;
        }
   x = x + delta;
}
```

   varre uma região retangular $[incioX, fimX] \times [inicioY, fimY]$ e escreve as coordenadas dos pontos (x, y) onde $F(x, y)$ seja aproximadamente zero.

   A funçao "`write()`" deve ser substituida por uma função apropriada de um determinada linguagem de programação.

   (b) (V)[ ](F)[ ] O conjunto

   $$\{(x, y)\ ;\ F(x, y) = 0\}$$

   é a *curva de nível* zero de F, é uma curva do plano XOY que corresponde à interseção do gráfico de F com o plano $z = 5$.

   (c) (V)[ ](F)[ ] O valor de F em qualquer um dos pontos (x, y);

   $$(x, y) \in \{(-2.8725, 0.1314), (-2.8368, 0.1263), (-2.6481, 0.0957)\}$$

   é menor do $\epsilon = 0.001$

(d) (V)[ ](F)[ ] Um valor aproximado de $F(x, y) = 5$ com erro inferior a $\epsilon = 0.001$ é obtido com qualquer um dos pontos (x, y) tal que

$$(x, y) \in \{(-1.4853, -0.4347), (-1.4394, 2.7018), (-1.4088, -0.5316), (-1.3986, -2.1024)\} \tag{2}$$

2. Reta tangente à curva de nível

(a) (V)[ ](F)[ ] A reta de equação

$$-4.78935366(x + 2.6481) + 21.00982536(y - 0.0957) \tag{3}$$

é uma aproximação da tangente à curva de nível zero de F no ponto $(a, b) = (1.4394, 2.7018)$.

(b) (V)[ ](F)[ ] A reta de equação

$$-4.95702432(x + 2.8368) - 24.09444765(y - 0.1263) = 0 \tag{4}$$

é uma aproximação da tangente à curva de nível zero de F no ponto $(a, b) = (-2.8368, 0.1263)$.

(c) (V)[ ](F)[ ] Se você

- guardar no arquivo "dados" o resultado do código 1a,
- se o ponto (a, b) estiver nesta listagem, $A = \frac{\partial F}{\partial x}|_{(a,b)}$ $B = \frac{\partial F}{\partial y}|_{(a,b)}$
- $g(x) = b + \frac{A}{B}(x - a)$

então o comando do `gnuplot`

`plot ''dados'', g(x)`

vai mostrar o gráfico de uma aproximação da curva de nível com uma reta tangente (aproximação) no ponto (a, b).

(d) (V)[ ](F)[ ] Se você

- guardar no arquivo "dados" o resultado do código 1a,
- se o ponto (a, b) estiver nesta listagem, $A = \frac{\partial F}{\partial x}|_{(a,b)}$ $B = \frac{\partial F}{\partial y}|_{(a,b)}$
- $g(x) = b - \frac{B}{A}(x - a)$

então o comando do `gnuplot`

`plot ''dados'', g(x)`

vai mostrar o gráfico de uma aproximação da curva de nível com uma reta tangente (aproximação) no ponto (a, b).

(e) (V)[ ](F)[ ] Se você

- guardar no arquivo "dados" o resultado do código 1a,
- se o ponto (a, b) estiver nesta listagem, $A = \frac{\partial F}{\partial x}|_{(a,b)}$ $B = \frac{\partial F}{\partial y}|_{(a,b)}$
- $g(x) = b - \frac{A}{B}(x - a)$

então o comando do `gnuplot`

`plot ‘‘dados’’, g(x)`

vai mostrar o gráfico de uma aproximação da curva de nível com uma reta tangente (aproximação) no ponto (a, b).

3. Dados os pontos (a_k, b_k) ; $k = 1, \dots, N$ sendo

$$P(x) = \prod_{k=1}^{N} (x - a_k) \tag{5}$$

e P_k cada uma das parcelas na derivada P'

(a) $\underline{\text{(V)[ ](F)[ ]}}$ $\sum\limits_{k=1}^{N} \frac{P_k}{P'(a_k)}$ é o polinômio de Lagrange que interpola estes pontos no plano.

(b) $\underline{\text{(V)[ ](F)[ ]}}$ Se a sucessão dos pontos (a_k) for estritamente crescente, $\sum\limits_{k=1}^{N} \frac{P_k}{P'(a_k)}$ é o polinômio de Lagrange que interpola estes pontos no plano.

(c) $\underline{\text{(V)[ ](F)[ ]}}$ Se a sucessão dos pontos (a_k) for estritamente crescente, $\sum\limits_{k=1}^{N} \frac{b_k P_k}{P'(a_k)}$ é o polinômio de Lagrange que interpola estes pontos no plano.

(d) $\underline{\text{(V)[ ](F)[ ]}}$ Suponha que N seja um número par, considere P definido na equação (5), e que a sucessão dos pontos (a_k) esteja contida no intervalo $[A, B]$. Se $x < A$ então $P(x) < 0$.

(e) $\underline{\text{(V)[ ](F)[ ]}}$ Suponha que N seja um número par, considere P definido na equação (5), e que a sucessão dos pontos (a_k) esteja contida no intervalo $[A, B]$. Se $x < A$ então $P(x) > 0$.

(f) $\underline{\text{(V)[ ](F)[ ]}}$ Suponha que N seja um número par, considere P definido na equação (5), e que a sucessão dos pontos (a_k) esteja contida no intervalo $[A, B]$. Se $x > B$ então $P(x) < 0$.

4. Considere os pontos

$$\{(-5, 7), (-2, 1), (0, 3), (2, -4), (5, 0), (7, 4), (9, 2), (13, -1)\} \tag{6}$$

e $P(x)$ o polinômio de Lagrange que interpola estes pontos.

(a) $\underline{\text{(V)[ ](F)[ ]}}$ $P(-3)$ é menor do que a média aritmética ponderada entre $\underline{7, 1}$.

(b) $\underline{\text{(V)[ ](F)[ ]}}$ $P(-3)$ é maior do que a média aritmética ponderada entre $\underline{7, 1}$.

(c) (V)[ ](F)[ ] $P(-1)$ é maior do que a média aritmética ponderada entre $1, 3$.

(d) (V)[ ](F)[ ] $P(-1)$ é menor do que a média aritmética ponderada entre $1, 3$.

5. Orientação Leia e rode os programas

`ap02_04b.gnuplot, ap02_04c.gnuplot`

que se encontram na página. Eles fazem duas experiências diferentes com polinômio de Lagrange e você deve identificar as afirmações corretas como consequência destas experiências. Como é uma questão experimental, é interessante que você antes de selecionar os itens corretos, **rode** e **altere** os programas para entender o que eles fazem. Não se esqueça de que nova cópia dos programas podem ser baixados da página tantas vezes quanto necessário (melhor guardá-los localmente para evitar contra-tempos devido as nossas comunicações de baixa classe), portanto você pode alterá-los tranquilamente durante o processo experimental.

Notação: Vou chamar de *átomos*, aos polinômios de grau $n-1$, P_k cuja combinação linear é o polinômio de Lagrange.

(a) (V)[ ](F)[ ] A soma dos átomos do polinômio de Lagrange é uma função polinomial de grau n quando houver n nós na malha.

(b) (V)[ ](F)[ ] A soma dos átomos do polinômio de Lagrange é uma função polinomial de grau $n-1$ quando houver n nós na malha.

(c) (V)[ ](F)[ ] Se a densidade dos nós da malha for grande (distância pequena entre os nós, ou ainda o passo da malha for pequeno), a aproximação produzida pelo polinômio de Lagrange é melhor.

(d) (V)[ ](F)[ ] A aproximação obtida com o polinômio de Lagrange é sempre muito boa, independente de que se tenha uma malha fina (passo muito pequeno) ou grossa (passo muito grande).

(e) (V)[ ](F)[ ] A função g que aparece nos programas serve como "exemplo de sensor" para mostrar a eficiência (ou falta de eficiência) do polinômio de Lagrange.

(f) (V)[ ](F)[ ] A diferença entre os dois programas propostos reside no passo da malha, num caso tem-se uma malha fina e no outro uma malha grossa. A aproximação produzida pelo polinômio de Lagrange quando a malha é fina é muito ruim.

(g) (V)[ ](F)[ ] A diferença entre os dois programas propostos reside no passo da malha, num caso tem-se uma malha fina e no outro uma malha grossa. A aproximação produzida pelo polinômio de Lagrange quando a malha é grossa é muito ruim.

(h) (V)[ ](F)[ ] Para obter uma boa aproximação com o polinômio de Lagrange, é preciso um polinômio de grau muito elevado.

(i) (V)[ ](F)[ ] Podemos obter uma boa aproximação com polinômio de Lagrange, com polinômios de grau relativamente pequeno.