Cálculo Numérico Computacional	**Lista no. 10**
Integral aprox e eq. diferenciais	tarcisio@member.ams.org
T. Praciano-Pereira	**Dep. de Matemática**
alun@:	
Univ. Estadual Vale do Acaraú	30 de março de 2008

Por favor, prenda esta *folha de rosto* na solução caso você prefira entregar pelo método medieval, deixando-a em branco. Ela será usada no relatório.

O professor estará disponível para atender dúvidas, por e-mail, todas as tardes entre 13:30 e 17:00 horas, quando responderá de imediato. Também é possível obter uma resposta imediata no horário 20:00h a 01:30h. Se você tiver conta no `gmail` é possível conversar on-line comm o professor nos horário indicados.

Tempo estimado para esta lista: 12 horas de trabalho, ou seja, três dias de trabalho dedicando quatro horas de trabalho em cada dia, ou alternativamente, 6 dias de trabalho com uma dedicação diária de duas horas de trabalho na lista, uma forma bem séria de passar a semana santa.

Data da publicação da lista: Sábado, 15 Março de 2008

Data de entrega: 24 de Março de 2008

1 Orientação

Observe que você vai entender os tópicos na medida em que você execute os experimentos. Ler, apenas, de nada adiantará.

objetivo: Tutorial para oferecer ao estudante uma oportunidade de executar experimentos com `gnuplot` e `calc` para entender o cálculo aproximada da integral e das soluções (aproximadas) de equações diferenciais de primeira ordem.

1.1 A integral

Nesta lista-tutorial, você vai ser conduzido à compreensão do cálculo da integral aproximada. Vou começar pelo método menos efetivo, e histórico, que, entretanto, está por baixo dos outros métodos mais efetivos, a *soma de Riemann*, seria interessante que você fizesse uma busca na Internet com a palavra "Riemann". Uma alteração da soma de Riemann que foi muito importante na época dos cálculos manuais é a *regra do trapésio.* Em ambos os casos se considera uma malha no intervalo de definição de uma função para obter sua integral aproximada, no caso das somas de Riemann com retângulos, na regra do trapésio, com trapésios em lugar dos retângulos. Estes métodos são pouco efetivos porque um bom resultado somete pode ser obtido com malhas finíssimas.

Melhor que trapésios, interpolação linear, são as interpolações polinômiais de grau maior do que 1 (interpolação linear é interpolação polinomial de primeiro grau) há um método que não vou descrever, o método de Simpson porque é uma aproximação polinomial do segundo grau e vou passar direto para aproximação do terceiro grau que é mais efetiva, e que nós estamos usando há algum tempo, agora vamos automatizá-la.

1.2 Equações Diferenciais

Vamos resolver, aproximadamente, uma equação diferencial chamada "exata", que é da forma

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{1}$$

com duas "variáveis", mas poderia ser com três "variáveis". Se você calcular a derivação implícita de uma função

$$z = F(x,y); \tag{2}$$
$$dz = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy; \tag{3}$$
$$P(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}\ ; Q(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y} \tag{4}$$
$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{5}$$

você vê, compare as equações (2)-(5), qual é a solução de uma equação diferencial exata: procuramos a função $z = F(x,y)$ cujas derivadas parciais são P, Q.

Mas na equação (5) tem apenas duas variáveis, quer dizer que é um objeto de dimensão[1]1 e como a derivada *produz* um objeto de dimensão 1 que é tangente ao gráfico de uma função, a conclusão é a de que estamos procurando uma reta tangente a uma curva. Na verdade a equação (5) se obtém quando derivamos implicitamente a expressão

$$F(x,y) = r\ ;\ \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0 \tag{6}$$

Na equação (6) temos uma curva de nível e a derivada implícita representa a reta tangente a esta curva de nível em um ponto. O gráfico na figura (1), página 2, mostra, com um grande erro, o que significa obter esta aproximação com uma

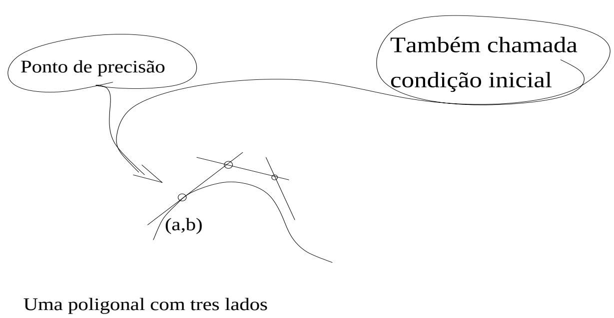

Figura 1: Aproximação poligonal de uma equação dif exata

poligonal. No ponto (a, b) foi encontrada a reta tangente, usando a equação

[1]Discuta esta questão da dimensão com o professor.

diferencial, sobre esta reta foi escolhido um ponto (a_1, b_1) onde foi calculada nova reta tangente, e sobre esta nova reta foi escolhido um novo ponto (a_2, b_2) onde foi calculada nova reta tangente e assim sucessivamente ...

Acoplando a este método um programa de computador, podemos conseguir precisões arbitrárias, a figura figura (2), página 3, mostra este resultado, agora

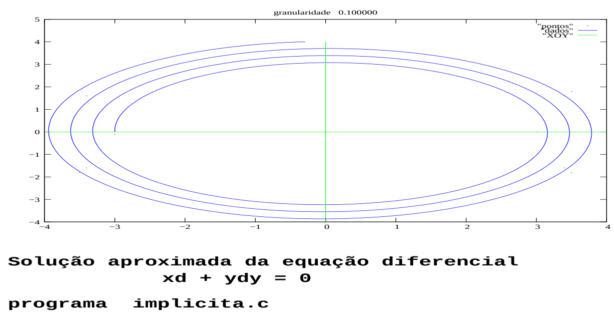

Figura 2: Solução aproximada da equação do círculo

a equação diferencial define um círculo e você está vendo a solução aproximada ainda com pequena precisão, para evidenciar o erro. O você vê na figura (2) é uma poligonal!

palavras chave: coeficiente de translação, coeficiente de dilação, integral aproximada, método de Simpson, núcleo, regra do trapésio, solução aproximada de equações diferenciais de primeira ordem, soma de Riemann, suporte de uma função, precisão da malha, pontos de precisão, quase-splines.

2 Exercícios

Exercícios 1 *Tutorial: integral aproximada e sol. aprox de eq. dif.*

1. *Verifique que* `gnuplot` sabe *somar funções. Defina*

$$f_1(x) = x^2, f_2(x) = 3x, f_3(x) = 1 \tag{7}$$

e execute

$$plot\ 0, f_1(x), f_2(x), f_3(x), x^2 + 3x + 1, f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$$

claro, no teminal do `gnuplot` *você deve usar a notação* `f1(x)` *em vez de* $f_1(x)$. *Analise o resultado que pode não parecer claro ou revelador...descubra por que.*

sugestão: Experimente, no mesmo `script`*,*

$$\begin{aligned} &plot\ 0\ , x^2+3x+1 && (8)\\ &pause\ -2 && (9)\\ &plot\ 0\ , f_1(x), f_2(x), f_3(x) && (10)\\ &pause\ -2 && (11) \end{aligned}$$

Você vai ter que definir "melhor" os índices, `gnuplot` *não entenderá* $f_1(x)$*.*

2. *<u>função triângulo</u> Construa uma função linear por pedaços,* f *ligando os "pontos"*

$$(-\infty, 0), (-1, 0), (0, 1), (1, 0), (\infty, 0) \tag{12}$$

e nula fora do intervalo $[-1, 1]$ *(suporte) e faça o gráfico.*

<u>Método:</u> use `gnuplot` *com o condicional*

```
(x<=a)?equacao1(x):equacao2(x)
```

que equivale a

```
if (x<=a) equacao1(x); else equacao2(x)
```

Você vai precisar de 4 condições, são 4 "segmentos" de reta.

Definição 1 *Suporte Nesta função definida acima, chamamos o conjunto* $[-1, 1]$ *de suporte de* f *é o conjunto em que ela é essencialmente diferente de zero. Esta é a definição de suporte, o conjunto dos pontos em uma função é essencialmente diferente de zero.*

3. *<u>translatando uma função</u> Defina* $g_a(x) = g(x - a)$ *a translatada de* g *para o ponto* $x = a$ *(observe o sinal). Defina, dentro de um script do* `gnuplot`*, as translatadas*

$$f_{-5}, f_{-4}, f_{-3}, f_{-2}, f_{-1}, f_1, f_0, f_2, f_3, f_4, f_5 \tag{13}$$

peça o gráfico da soma das translatadas. Analise o resultado.

4. *<u>interpolação</u> Considere os pontos no plano*

$$(-5, 5), (-4, 3), (-3, 4), (-2, 3), (-1, 1), (0, 0), (1, -1), (2, 0), (3, 3), (4, 4), (5, 7) \tag{14}$$

que é uma coleção de dados "observados" (x_k, y_k)*. Calcule a combinação linear das funções definidas na equação (13) usando o coeficiente* y_k *aplicado em* f_k *e faça o gráfico. Faça uma análise do resultado.*

<u>sugestão:</u> você certamente vai ter que criar uma sistema de índices adequado para usar com `gnuplot`*, ele não entenderia* f_{-5}*, por exemplo. Observe que você tem 11 funções e 11 pontos.*

5. *questão discursiva*

   Precisão da malha, pontos de precisão, núcleo, interpolação, norma da partição.

   Nas questões anteriores você foi conduzid@ a um método de interpolação linear, a malha usada tem norma 1 tendo como pontos de precisão os inteiros. A função f definida na equação (12) é o núcleo desta interpolação. Tente colocar numa pequena redação as palavras-chave sublinhadas acima a partir do que você tiver entendido como conseqüência dos experimentos feitos.

6. *precisão do núcleo de interpolação Podemos melhorar a precisão aplicando um fator de aceleração no* núcleo f

   Definição 2 *Aceleração do núcleo de interpolação*

   $$_af(x) = af(ax) \tag{15}$$

   O coeficiente a se chama `coeficiente de dilação` *vem de* dilatação.

   Acima usamos `coeficientes de translação`*. A notação teve que ser complicada, agora temos dois tipos de coeficientes para aplicar em um* `núcleo`*, o* `coeficiente de translação` *e o* `coeficiente de dilação`*. Abaixo você vai ver $_af_b$ em que a é o* `coeficiente de dilação` *e b é o* `coeficiente de translação`*. A notação não é padronizada (o assunto é relativamente novo).*

   Faça com `gnuplot` *os gráficos de $_af$ com*

   $$a \in \{3, 2, 1, \frac{1}{2.0}, \frac{1}{3.0}\}$$

   Calcule a integral de

   $$\int_{-\infty}^{\infty} {_af(x)}dx$$

   em cada um destes[2] casos. Analise se o resultado deste cálculo é coerente com os gráficos obtidos. A integral representa a quantidade de alguma coisa que uma função representa.

7. *questão discursiva As palavras* `núcleo`, `sinal` *tem um significado próximo, em distintos contextos. Procure, por exemplo na* `wikipedia`*, estes conceitos, e tente colocar numa redação os conceitos que você aprendeu neste tutorial.*

[2] Não se deixe assustar pela notação, bata o pé e espante o fantasma!

8. *Considere os pontos*

$$(-3.666..., 6), (-3.333..., 7), (-3, 4), (-2.5, 1), (-2, 1), (-1, 3) \tag{16}$$

e encontre uma combinação linear adequada de ${}_af_b$ *para obter uma interpolação destes dados. Faça o gráfico com* `gnuplot` *Justifique sua escolha de* coeficiente de translação *e* coeficiente de dilação

Para ver a poligonal e os pontos interpolados, defina um arquivo "dados" colocando nele os pontos acima, separados cada um por uma linha em branco (caso contrário `gnuplot` *liga tudo com linhas) e use o comando*

plot "dados", f(x)

Vale a pena ver o resultado eliminando as linhas entre os pontos em "dados" com `gnuplot`.

9. *regra do trapésio Mostre que a integral do fenômeno representado pelos dados amostrais na equação (16) é uma combinação linear da integral do núcleo f, exiba esta combinação linear.*

10. *Considere a função*

$$g : [-3, 4] \to \mathbf{R}\ ;\ g(x) = \frac{2x}{1 + x^2} \tag{17}$$

   (a) *construa a interpolação linear de g usando as translações do núcleo f usando a malha dos nós inteiros do intervalo $[-3, 4]$.*

   (b) *faça o gráfico conjunto de g, da interpolação linear.*

   (c) *regra do trapésio Calcule a integral da interpolação linear como uma combinação linear de integrais.*

   (d) *Calcule a integral (exata) de g e compare com o resultado obtido com a interpolação linear.*

   (e) *Calcule uma interpolação polinomial de grau dois (quase-splines) de g e calcule a sua integral.*

   (f) *Soma de Riemann Em vez de trapésios, em casa sub-intervalo use um retângulo cuja altura seja o valor de f no primeiro ponto do intervalo e a base a medida do sub-intervalo. Calcule as somas destas áreas como um valor aproximado de $\int_{-3}^{4} g(x)dx$. Use a malha formada pelos números inteiros do intervalo considerado. Compare com os outros valores obtidos.*

   (g) *O programa* `riemann.c`, *que você pode encontrar aqui*

   http://www.4shared.com/file/19025368/1f11f587/riemann.html

   automatiza o cálculo da integral usando somas de Riemann, escolhendo o número de divisões do intervalo você pode obter melhores aproximações.

Calcule esta integral, usando este programa (ou outro parecido que você faça) com pelo menos 10.000 divisões do intervalo e compare com os valores obtidos nos outros itens.

11. *Equação diferencial exata*

    (a) *Construa uma poligonal com 3 lados, se inspire na figura (1), página 2, como solução aproximada (poligonal) da equação diferencial exata*

    $$(3x^2 + 3y^2)dx + (6xy + 8y)dy = 0 \tag{18}$$

    usando o ponto $(-2, 3)$ *como* **condição inicial**, *corresponde ao ponto* (a, b) *que aparece na figura (1). Use passo* $\Delta x = 1$ *para obter cada um dos outros dois pontos.*

    (b) *Faça o gráfico da solução usando* `gnuplot`

    (c) *Refine a solução anterior usando passo* $\Delta x = 0.5$ *e uma poligonal de 6 lados. Faça o gráfico da solução usando* `gnuplot`.

Referências

[1] Um algoritmo para calcular e fazer o gráfico de polinômio dadas quatro condições.

Procure "sistema" no link *programas*, na página da disciplina.

http://calculo-numerico.sobralmatematica.org/

[2] *Um pacote para cálculo numérico*

`http://www.gnu.org/software/octave/`

[3] *Um pacote para cálculo numérico*

Scilab grupe - INRIA `http://www.scilab.org`

[4] Praciano-Pereira, T. *Cálculo Numérico Computacional* T. Praciano-Pereira edição eletrônica preliminar, procure *textos*, na página da disciplina

http://calculo-numerico.sobralmatematica.org/

Versão em uma página por folha A4 ananu00.pdf ou versão em duas página por folha A4, ananu00_2p.pdf

[5] Praciano-Pereira, T *Programas para Cálculo Numérico*

http://www.4shared.com/dir/3801087/2fa7cabd/programas.html

Procure *programas*, na página da disciplina

http://calculo-numerico.sobralmatematica.org/

[6] *A enciclopédia livre na Internet - Wikipédia*
http://encyclopedia.thefreedictionary.com/
http://en.wikipedia.org/
http://pt.wikipedia.org