

Cálculo Numérico Computacional    **Lista 09**  
integral aproximada                    `tarcisio@member.ams.org`  
T. Praciano-Pereira                    **Dep. de Matemática**  
**alun@:**

---

---

Univ. Estadual Vale do Acaraú        3 de março de 2008

---

---

## 1 Orientação

Por favor, prenda esta *folha de rosto* na sua solução desta lista, deixando-a em branco, no caso de entregar pelo método antigo, em papel. Ela será usada na correção.

As listas são uma preparação para a prova que complementar a sua nota entre 6 e 10. Fazendo com cuidado a lista você esta se habilitando para esta prova. As listas de exercícios, além de representarem uma preparação para prova, *também indicam a sua frequência na disciplina*, a **não entrega** na data certa vai corresponder a um **registro de falta**.

Este trabalho pode ser entregue por equipes com no máximo três alun@s, porém todos os membros da equipe devem entregar a sua cópia do trabalho porque é o registro do arquivo que faço. Se fizerem em papel, apenas uma cópia por equipe deve ser entregue, com os nomes de todos os membros da equipe. Observe que o trabalho eletrônico também deve conter os nomes de todos os membros da equipe, embora eu não vá corrigir o trabalho, você tem interesse em fazê-lo como se isto fosse acontecer, leia o parágrafo anterior.

Leia as instruções sobre nomes de arquivos, arquivos com nome fora do padrão serão ignorados. Releia as instruções. Eu um uso um método semi-automatizado para coletar os arquivos.

Todas as tardes, entre 13:00 horas e 17:00 horas eu estarei disponível para responder dúvidas, por e-mail. Aos sábados e domingos depois de 20:00 e até 1:00 ou 2:00 eu ainda estarei atendendo, observe que aos sábados e domingos, de tarde, eu não estarei disponível com segurança. Evite os piques de horário, faça o seu trabalho à tempo.

Data de entrega: 10 de Março.

**palavras chave:** aproximação polinomial, campo vetorial, equações diferenciais ordinárias, integral aproximada, solução aproximada de equações diferenciais, valor médio integral, .

**objetivo:** Nesta lista você vai fazer aplicações da aproximação polinomial na análise da informação contida em uma massa de dados obtida por um sensor. Suponhamos que  $f$  represente o fenômeno estudado, ou medido, em um número  $n$  de nós que coletaram as informações no intervalo  $[a, b]$ , os extremos do intervalo fazem parte do conjunto dos nós considerados.

Na primeira questão desta lista você é convidado a rever algumas contas que você deveria ter feito em Cálculo, são exemplos que aparecem na parte avançada de integração. Há aspectos filosóficos a discutir aqui, um deles é o símbolo  $\infty$ , este é um dos aspectos ligados à fronteira do conhecimento e você pode ser

perguntar se este símbolo representa alguma coisa real, se existe. Primeiro que tudo é um símbolo e o simples fato de que o consideremos assim já é um comprovante de existência. Quando escrevemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

queremos dizer que

$$\int_{-\rho}^{\rho} f(x)dx$$

quando  $\rho$  for arbitrariamente grande, existe e o seu comportamento, quando  $\rho$  cresce indefinidamente, pode se previsto, isto é o que significa *limite* e nós escrevemos

$$\lim_{\rho} \int_{-\rho}^{\rho} f(x)dx$$

para significar o que falei acima. Por exemplo podemos dizer que o limite da atração solar quando um corpo se afasta indefinidamente é zero, porque a lei de Newton, que aceitamos como perfeita, diz que a atração da gravidade é dada pela equação

$$\frac{mM}{r^2}$$

em que  $m, M$  são as massas dos dois corpos e  $r$  é a distância entre os seus centros. E a medida de que  $r$  crescer esta fração ficará menor do que qualquer número pequeno que escolhermos o que traduzimos com o símbolo

$$\lim_{r=\infty} \frac{mM}{r^2} = 0$$

e **nós podemos provar que isto é verdade**, aceitando, como aceitamos, a lei da de atração da gravidade de Newton. A lei de Newton pode ser verificada experimentalmente, até um certo valor de  $r$  e finalmente *aceita* com válida.

Mas há outras afirmações que fogem à nossa capacidade de verificação e ficam na decisão pessoal de cada um de nós em colocá-las ou não em nosso sistema científico, por exemplo se o Universo é ou não finito. Eu não admito um universo finito, mas não aceito discutir este assunto, até mesmo porque ele não pode interferir em nada que eu possa construir. Também não temos meios para provar que esta afirmação, “o universo é infinito”, é verdadeira ou falsa. Sua aceitação não contradiz nenhuma das leis da natureza não podendo então representar um fato científico relevante, faz parte das nossas concepções filosóficas.

Voltando às integrais, ao admitirmos que

$$f(r) = \frac{mM}{r^2}$$

represente a quantidade de força exercida por uma fonte sobre um corpo, podemos calcular toda a energia gasta sobre este corpo pela fonte o que está representado pela integral

$$\int_a^{\infty} \frac{mM}{r^2} dr ; a > 0$$

que é finita. Esta integral, em particular, ninguém se interessa em calcular, embora ela signifique o que descrevi acima.

Analisando alguns fenômenos, os probabilistas descobriram que a *distribuição de probabilidades* de vários fenômenos se comportava de forma muito semelhante a expressão

$$f(x) = e^{-x^2} \quad (1)$$

e aqui temos novamente uma decisão semelhante à da lei da gravitação de Newton, aceitamos os resultados experimentais como verdadeiros e estabelecemos uma lei. Como foi definido que “probabilidade” é um número que deve ficar entre 0 e 1, então a função que define a a distribuição de probabilidade gaussiana não é a da equação (1) e sim

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \quad (2)$$

em que estamos dividindo a função que aparece na equação (1) pela constante que é o valor da integral de  $f$  sobre a reta inteira, sendo  $g$ , na equação (2), a expressão da distribuição gaussiana (ou distribuição normal).

1. a *quantidade total do fenômeno medido* é dado pela integral

$$\int_a^b f(t) dt;$$

2. o valor médio no intervalo  $[p, q]$  é dado pelo *valor médio integral*

$$\frac{1}{q-p} \int_p^q f(t) dt,$$

em que  $[p, q] \subset [a, b]$

Outro item desta lista consiste na solução aproximada de uma *equação diferencial*, abaixo farei uma breve introdução teórica para o assunto.

Os dois assuntos correspondem aos capítulos 5,6 do meu livro,

[http://www.4shared.com/file/10356496/c9e79649/ananu00\\_2p.html](http://www.4shared.com/file/10356496/c9e79649/ananu00_2p.html)

mas foram objeto de listas anteriores em casos mais simples. Por exemplo, a solução aproximada de equações diferenciais é, em essência, equação de retas tangentes, no presente caso uma poligonal.

## 2 Exercícios

### Exercícios 1 Aplicação de aprox. polinomial

#### 1. informativa

*Estimativa de tempo de resolução individual: 2 horas e meia.*

*Não precisa ser feita se já tiver sido feita alhures.*

*Prove que:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad (3)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 1 \quad (4)$$

$$\frac{1}{a\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{x-m}{a}\right)^2} dx = 1 \quad (5)$$

$$a \int_{-\infty}^{\infty} f(at) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt; \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-m)^2} dx \quad (6)$$

A equação (3) pode ser obtida da integral dupla de  $e^{-(x^2+y^2)}$  no plano inteiro, usando coordenadas polares, a equação (4) é a chamada normalização da equação (3), e a equação (5) pode ser obtida de uma das anteriores por mudança de variável e a distribuição normal com valor médio  $\underline{m}$ , a translação de uma das anteriores para o ponto  $\underline{m}$ .

Você pode obter a equação (5) provando as equações (6) em que a integral de  $f$  deve existir.

2. Integral e valor médio integral Você pode fazer esta questão como desejar, mas ela é pensada para ser feita com aproximação polinomial de grau três, por pedaços. A determinação dos coeficientes dos polinômios pode ser feita usando um programa que resolva equações lineares como `scilab`, se  $A$  for a matriz do sistema, sendo  $B$  a matriz de dados,  $A \setminus B$  é solução do sistema  $Ax = B$ .

*Estimativa de tempo de resolução individual: 3 horas, usando `scilab`, certamente, menos de uma hora. Neste caso todos os cálculos feitos no `scilab` devem ser incluídos na resolução de forma ordenada e lógica mostrando como a construção foi feita, passo-a-passo.*

*Você pode obter as respostas abaixo usando uma calculadora científica e estará se enganando (não tem como enganar o professor) porque o objetivo não é obter o número e sim o método de obtenção. Não se engane!*

*Considere a função de distribuição gaussiana definida por*

$$f(x) = \sqrt{\frac{0.2}{\pi}} e^{-0.2(x-3)^2}$$

e a malha dos nós inteiros no intervalo  $[-3, 9]$ . Os extremos do intervalo fazem parte da malha.

- (a) Calcule a média de  $g(x) = xf(x)$  no intervalo  $[-3, 9]$   
 (b) Calcule estimativas dos valores de  $g$  nos pontos inteiros do intervalo  $[-3, 9]$ .

3. Equações diferenciais Vamos aplicar o método das tangentes para encontrar soluções aproximadas de equações diferenciais, este método é geralmente conhecido como método de Euler. Há dois tipos de equações a que este método se aplica facilmente (com bons resultados)

- as equações do tipo  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ ;
- as equações diferenciais exatas (em outra lista)

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

Vamos tratar destes dois tipos de equações aqui.

metodo: Para cada tipo de equação vamos fazer um tutorial passando por algumas experiências e seguindo para o desenvolvimento computacional.

Em cada grupo de questões um pequeno texto-resumo da teoria antecede os quesitos. Há dois grupos de questões nesta lista.

Depois de cada grupo de questões um pequeno texto indica aplicações para o método.

Campos vetoriais descrevem o fluxo que movem partículas num fluido, por exemplo, as moléculas de água num rio sobre o qual se pense construir uma ponte, ou do vento sobre uma região onde se espera coletar energia aeólica.

Em cada ponto da região temos vetores indicando o gradiente do campo, o vetor das derivadas parciais. Malhas mais finas ou mais grossas permitem uma visualização do campo de forças e a resolução, em geral, tem que ser decidida experimentalmente, este é um dos objetivos desta lista. Um exemplo na figura (1) página 6,

que é um campo vetorial gerado pelo programa `campo_vet.c` que você pode encontrar aqui, [3, programas].

(a)  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$

Estimativa de tempo de resolução individual: 3 horas.

Considere a expressão

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = x^2 + xy + y^2 \quad (7)$$

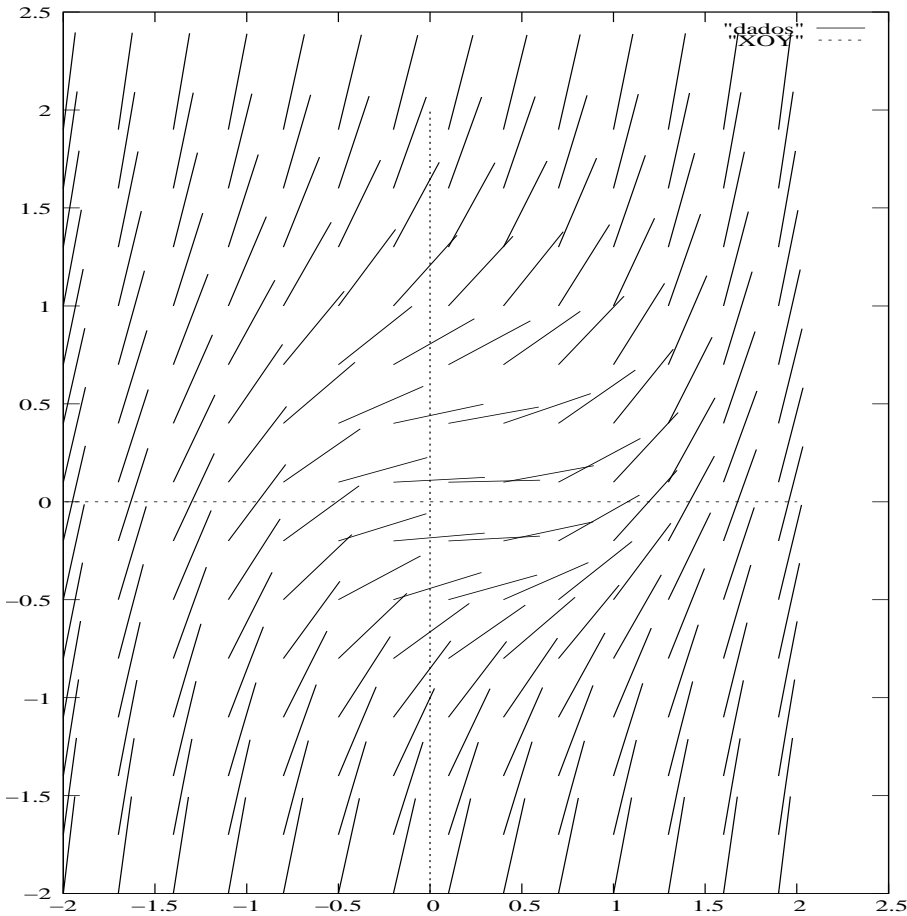


Figura 1: Campo vetorial - vetores tangentes ao fluxo

e a malha de norma

$$\Delta x = 1 ; \Delta y = 1$$

no retângulo

$$[-3, 3] \times [-3, 3]$$

i. Em cada nó desta malha desenhe um vetor tangente de módulo

$$\frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{2}$$

ii. Coloque no arquivo ''dados'' os pares de pontos que determinam os vetores tangentes obtidos e visualize o resultado com `gnuplot` usando o comando

`plot ''dados'' with lines`

separando cada par de pontos com uma linha em branco (caso contrário `gnuplot` vai ligar todos os pontos).

- iii. Faça um programa que crie o arquivo `''dados''` e chamando `gnuplot` para visualizar o campo vetorial, não se esqueça de fazer o programa separar os pontos com linha em branco.
- iv. O resultado desta experiência produz uma visualização do fluxo de

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + xy + y^2$$

na região considerada. Esta visualização pode ficar anulada tanto por uma precisão exagerada ou pobre, (uso de  $\Delta x, \Delta y$  muito pequenos ou muito grandes. Estude isto fazendo o gráfico com diferentes normas para a malha.

- (b) Refaça a questão anterior com

$$f(x, y) = \frac{y + 3}{x - 3} \quad (8)$$

na região  $[-10, 10]$ . Discuta o resultado.

Estimativa de tempo de resolução individual: 3 horas.

exemplo de aplicação em vez de termos a expressão algébrica  $f(x, y)$  na equação (7) podemos ter um arquivo semelhante ao `''dados''` obtido por sensores. O campo vetorial resultante descreve aproximadamente o fluxo de um fenômeno no retângulo observado. É o caso do fluxo de um rio, para determinarmos a melhor localização de uma ponte, dos pilares da ponte, embasamento etc... ou fluxo aélico para distribuição de cata-ventos em uma região.

4. Questão obrigatória Faça uma análise crítica dos objetivos e do método deste tutorial. Você não receberá nota por sua opinião mas é obrigado a emití-la, em outras palavras, você não corre riscos de perder pontos se manifestando negativamente sobre a disciplina ou sobre os métodos usados pelo professor, e deve adquirir coragem para criticar a Universidade e os métodos que os professores empregarem, até mesmo porque isto terá consequências para a sua vida.

Observe também que a sua análise força-l@-á a refletir sobre o seu aprendizado e sobre os métodos usados na disciplina.

Esta questão deve ser enviada em separado, com o mesmo nome de arquivo desta lista, porém por e-mail, diretamente para o professor:

`num_curso_seunome_09.pdf`

ou, pelo método antigo, em papel, na secretaria do curso. Consulte as instruções sobre nomes e formatos dos arquivos.

## Referências

- [1] Um algoritmo para calcular e fazer o gráfico de polinômio dadas quatro condições.  
Procure “sistema” no link *programas*, na página da disciplina.  
<http://calculo-numericosobralmatematica.org/>
- [2] Praciano-Pereira, T. *Cálculo Numérico Computacional* T. Praciano-Pereira edição eletrônica preliminar, procure *textos*, na página da disciplina  
<http://calculo-numericosobralmatematica.org/>  
Versão em uma página por folha A4 *ananu00.pdf* ou versão em duas páginas por folha A4, *ananu00\_2p.pdf*
- [3] Praciano-Pereira, T *Programas para Cálculo Numérico*  
<http://www.4shared.com/dir/3801087/2fa7cabd/programas.html>  
Procure *programas*, na página da disciplina  
<http://calculo-numericosobralmatematica.org/>
- [4] *A enciclopédia livre na Internet - Wikipédia*  
<http://encyclopedia.thefreedictionary.com/>  
<http://en.wikipedia.org/>  
<http://pt.wikipedia.org>

## Referências

- [1] Um algoritmo para calcular e fazer o gráfico de polinômio dadas quatro condições.  
Procure “sistema” no link *programas*, na página da disciplina.  
<http://calculo-numericosobralmatematica.org/>
- [2] Praciano-Pereira, T. *Cálculo Numérico Computacional* T. Praciano-Pereira edição eletrônica preliminar, procure *textos*, na página da disciplina  
<http://calculo-numericosobralmatematica.org/>  
Versão em uma página por folha A4 *ananu00.pdf* ou versão em duas páginas por folha A4, *ananu00\_2p.pdf*
- [3] Praciano-Pereira, T *Programas para Cálculo Numérico*  
<http://www.4shared.com/dir/3801087/2fa7cabd/programas.html>  
Procure *programas*, na página da disciplina  
<http://calculo-numericosobralmatematica.org/>

[4] *A enciclopédia livre na Internet - Wikipédia*

<http://encyclopedia.thefreedictionary.com/>

<http://en.wikipedia.org/>

<http://pt.wikipedia.org>