

Cálculo Numérico Computacional **Lista 08**
assunto desta lista **tarcisio@member.ams.org**
 T. Praciano-Pereira **Dep. de Matemática**
alun@:

Univ. Estadual Vale do Acaraú 27 de fevereiro de 2008

1 Orientação

objetivo: Conduzí-l@ a compreender o chamado polinômio de Lagrange. É um tópico de aproximação polinomial.

Esta lista contém a solução dos exercícios na segunda seção. A apresentação da solução vem em consequência da aula passada, em discutimos o Polinômio de Lagrange à qual compareceram poucos alunos e quero assim considerar este assunto encerrado. Sugiro o método: primeiro tente resolver as questões, depois recorra a solução para entender uma forma de resolver, mas tente você mesmo escrever os detalhes. A pura leitura não o levará ao domínio do assunto.

Esta lista tem três seções.

palavras chave: aproximação polinomial, polinômio de Lagrange, 1-splines, quase-splines

2 Exercícios

Exercícios 1 *Aproximação Polinomial*

1. Função linear por pedaços - 0.5 h

(a) Considere a seqüência de nós

$$x_k \in \{-3, -2.5, -1.5, -0.5, 0.5, 1.5, 2.5, 3\} \subset [-3, 3]$$

e a seqüência de valores correspondentes

$$y_k \in \{8.25, 2.25, -1.75, -3.75, -3.75, -1.75, 2.5, 3\}$$

Construa, (faça o gráfico) da poligonal que interpola os pontos (x_k, y_k) .

(b) Chame f a função cujo gráfico foi feito no item anterior e calcule os seus valores nos pontos inteiros do intervalo $[-3, 3]$.

(c) Calcule $\int_{-3}^3 f(x)dx$

2. Função polinomial por pedaços - 1.5 h Considere a seguinte melhoria nos dados do item anterior: para cada nó da malha, o sensor calculou a taxa de variação

$$d_k \in \{1, 0, -2, -1, 0, 1, 0, -1\}$$

e conseqüentemente, em cada intervalo $I_k = [x_k, x_{k+1}]$, temos quatro informações:

x_k	y_k	d_k
x_{k+1}	y_{k+1}	d_{k+1}

o que permite obter um polinômio P_k de grau 3 definido em I_k .

Encontre, para cada intervalo I_k , o polinômio P_k que pode ser obtido considerando os valores nos extremos de I_k , y_k, y_{k+1} e as taxas de variação nestes pontos, d_k, d_{k+1} .

A função f definida por estes polinômios, é uma função polinomial por pedaços. Calcule

$$\int_{-3}^3 f(x) dx$$

3. derivada algorítmica Considere

$$P(x) = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) = \prod_{k=1}^3 (x - a_k) \quad (1)$$

Verifique que

$$P'(x) = (x - a_1)(x - a_2) + (x - a_1)(x - a_3) + (x - a_2)(x - a_3) = \sum_{k=1}^3 P_k(x) \quad (2)$$

Escreva as equações dos polinômios P_k , e observe uma relação entre eles e o polinômio P .

4. Tutorial sobre Polinômio de Lagrange

(a) derivada algorítmica Considere

$$P(x) = \prod_{k=1}^n (x - a_k) \quad (3)$$

um polinômio do grau n . Defina $P_k(x) = \frac{P(x)}{x - a_k}$ e verifique que

- $P'(x) = \sum_{k=1}^n P_k(x)$
- $P_k(x) = \frac{P(x)}{(x - a_k)}$ é um polinômio de grau $n - 1$, para cada k .

(b) Prove que se P for um polinômio definido pela equação (eq. 3) e as raízes a_k todas distintas, então $P'(a_k) \neq 0$ para todo $k = 1 \dots n$

(c) Mostre com um exemplo que a condição 'raízes distintas' na questão anterior, falhando, se vai ter $P'(a_k) = 0$ para algum a_k . Qual ?

(d) Considere a malha $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ no intervalo $[a, b]$. Defina P como na (eq. 3) e $f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{P_k(x)}{P'(a_k)}$. Suponha inicialmente que $n = 3$ e calcule

$$f(a_1), f(a_2), f(a_3) \quad (4)$$

Generalize, para n qualquer calculando

$$f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n) \quad (5)$$

Verifique que f é um polinômio de grau $n - 1$ e escreva a equação de f .

(e) Polinômio interpolando pontos no plano

i. Considere a sequência de nós

$$\{-3, -2.5, -1.5, -0.5, 0.5, 1.5, 2.5, 3\} \subset [-3, 3]$$

Calcule P definido pela (eq. 3) relativamente a esta malha.

ii. Considere os pontos do plano

$$\{(-3, 1), (-2.5, 0), (-1.5, 2), (-0.5, 3), (0.5, 3), (1.5, 1), (2.5, -2), (3, 4)\}$$

que são da forma (x_k, y_k) . Defina a função $f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{y_k P_k(x)}{P'(a_k)}$ e calcule $f(x_k)$, para cada valor de k .

Conclua que f é um polinômio, de grau $n - 1$ que passa nos pontos

$$\{(-3, 1), (-2.5, 0), (-1.5, 2), (-0.5, 3), (0.5, 3), (1.5, 1), (2.5, -2), (3, 4)\}$$

(f) Polinômio de Lagrange - caso geral Considere a malha

$$a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$$

no intervalo $[a, b]$. Defina P como na (eq. 3) e $f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{b_k P_k(x)}{P'(a_k)}$.

Calcule

$$f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n) \quad (6)$$

Verifique que f é um polinômio de grau $n - 1$ que interpola os pontos

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n) \quad (7)$$

3 Soluções

Solução 1 Exercício 1. página 1 A interpolação linear é uma função linear por pedaços cujo gráfico é uma poligonal unindo os pontos interpolados. O valor da aproximação será uma média aritmética ponderada entre os pontos de precisão .

Na prática isto significa que temos que calcular as equações das retas ligando este pontos e cada equação de reta fornece o valor aproximado da função no intervalo em que ela estiver definida.

Para calcular estas equações de reta estou usando o método

$$y - y_i = m(x - x_i); m = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$$

com `gnuplot` temos que escrever

$$P_i(x) = y_i + m_i(x - x_i); m_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$$

em que $(x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1})$ são os pontos que correspondem a extremos sucessivos de cada um dos sub-intervalos. Para obter o gráfico do 1-splines composto por estas funções do primeiro grau temos que definir uma sucessão de condicionais. `gnuplot` entende `tt if()/else` usando a sintaxe da linguagem C. Como a expressão vai ficar muito grande teremos que usar a contrabarra “\” para eliminar o fim de linha e assim poder escrever a expressão ao longo de várias linhas (`gnuplot` interpreta uma expressão quando encontra um fim de linha o que nos impede de fornecer várias linhas de comandos sem este artifício).

```
x1 = -3; x2=-2.5; x3=-1.5; x4=-0.5; x5 =0.5; x6 =1.5; x7 = 2.5;x8 = 3;
y1=8.25; y2 =2.25;y3 =-1.75;y4 =-3.75 ;y5 =-3.75;y6 =-1.75;y7 =2.5; y8 =
3 ;
m1 = (y2-y1)/(x2-x1); m2 = (y3-y2)/(x3-x2);m3 = (y4-y3)/(x4-x3);
m4 = (y5-y4)/(x5-x4); m5 = (y6-y5)/(x6-x5);m6 = (y7-y6)/(x7-x6);
m7 = (y8-y7)/(x8-x7);
P1(x) = y1 + m1*(x - x1);
P2(x) = y2 + m2*(x - x2);
P3(x) = y3 + m3*(x - x3);
P4(x) = y4 + m4*(x - x4);
P5(x) = y5 + m5*(x - x5);
P6(x) = y6 + m6*(x - x6);
P7(x) = y7 + m7*(x - x7);
f(x) = (x<x2)? P1(x):(x<x3)?P2(x):(x<x4)?P3(x):\
(x<x5)?P4(x):(x<x6)?P5(x):(x<x7)?P6(x):P7(x);
set xrange [-3:3]
plot f(x), 0
pause -2
```

$$x_k \in \{-3, -2.5, -1.5, -0.5, 0.5, 1.5, 2.5, 3\} \subset [-3, 3]$$

e a seqüência de valores correspondentes

$$y_k \in \{8.25, 2.25, -1.75, -3.75, -3.75, -1.75, 2.5, 3\}$$

Escrevi o seguinte programa em `calc` para expressar as equações das retas:

```
define reta(y,yy,x,xx) {
local m;
m = (yy-y)/(xx-x);
```

```
printf('y - %f = %f( x - %f)\n', y,m, x);
return(0);
}
```

$$[-3, -2.5] ; P_1(x) ; y - 8.25 = -12(x + 3) \quad (8)$$

$$[-2.5, -1.5] ; P_2(x) ; y - 2.25 = -4(x + 2.5) \quad (9)$$

$$[-1.5, -0.5] ; P_3(x) ; y + 1.75 = -2(x + 1.5) \quad (10)$$

$$[-0.5, 0.5] ; P_4(x) ; y + 3.75 = 0(x + 0.5) \quad (11)$$

$$[0.5, 1.5] ; P_5(x) ; y - -3.75 = 2(x - 0.5) \quad (12)$$

$$[1.5, 2.5] ; P_6(x) ; y + 1.75 = 4.25(x - 1.5) \quad (13)$$

$$[2.5, 3] ; P_7(x) ; y - 2.5 = 1(x - 2.5) \quad (14)$$

$$(15)$$

O gráfico da poligonal pode ser visto na figura (fig. 1) página 5,

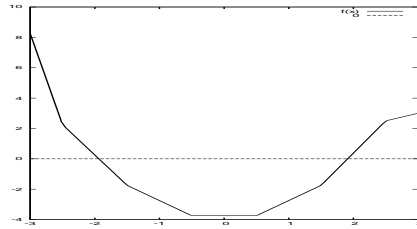


Figura 1: 1-splines

Solução 2 Exercício 1b, página 1 Nos seguintes intervalo há pontos inteiros com a correspondente equação de reta:

$$-2 \in [-2.5, -1.5] ; P_2(-2) = -4.25 \quad (16)$$

$$-1 \in [-1.5, -0.5] ; P_3(-1) = -2.75 \quad (17)$$

$$0 \in [-0.5, 0.5] ; P_4(0) = -3.75 \quad (18)$$

$$1 \in [0.5, 1.5] ; P_5(1) = 4.75 \quad (19)$$

$$2 \in [1.5, 2.5] ; P_6(2) = 0.375 \quad (20)$$

Solução 3 Exercício 1c, página 1 A área é a soma algébrica das áreas dos triângulos ou trapézios que ela define com OX e vale -2 . Estou falando de triângulos e trapézios porque f é uma função linear por pedaços.

O cálculo deve ser este (sem garantias....)

$$x = 8.25 + 2.25 - 1.75 - 3.75 - 3.75 - 1.75 + 0.5 \cdot (2.5) + \\ 2.25 - 1.75 - 3.75 - 3.75 - 1.75 + 2.5 + 0.5 \cdot 3$$

$$x = x \cdot 0.5$$

cada parcela é a soma das alturas dividida por dois, vezes a base. Nas duas primeiras linhas você pode identificar todas as alturas eliminada a última na primeira linha e a primeira na segunda linha o que equivale a “soma das alturas”, na terceira linha dividi por dois. A base do último trapézio é 0.5 que aparece multiplicando os dois últimos fatores (na primeira e na segunda linhas).

Solução 4 Exercício 2, página 1 Usando o programa `aproximacao.c`.

Os coeficientes foram calculados com o programa `ex0732.c`. Cada polinômio foi desenvolvido no extremo inicial do respectivo sub-intervalo.

$$x \in [-3.00, -2.50] P_1(x) = a_0 + a_1(x + 3) + a_2(x + 3)^2 + a_3(x + 3)^3 \quad (21)$$

$$a_0 = 8.25; a_1 = 1.000000; a_2 = -76.00; a_3 = 100.00 \quad (22)$$

$$x \in [-2.50, -1.50] P_2(x) = a_0 + a_1(x + 2.5) + a_2(x + 2.5)^2 + a_3(x + 2.5)^3 \quad (23)$$

$$a_0 = -76.00; a_1 = 0.000000; a_2 = -10.000000; a_3 = 6.000000 \quad (24)$$

$$x \in [-1.50, -0.50] P_3(x) = a_0 + a_1(x + 1.5) + a_2(x + 1.5)^2 + a_3(x + 1.5)^3 \quad (25)$$

$$a_0 = -1.7500; a_1 = -2.00000; a_2 = -1.00000; a_3 = 1.000000 \quad (26)$$

$$x \in [-0.50, 0.50] P_4(x) = a_0 + a_1(x + 0.5) + a_2(x + 0.5)^2 + a_3(x + 0.5)^3 \quad (27)$$

$$a_0 = -3.7500; a_1 = -1.000000; a_2 = 2.000000; a_3 = -1.000000 \quad (28)$$

$$x \in [0.50, 1.50] P_5(x) = a_0 + a_1(x - 0.5) + a_2(x - 0.5)^2 + a_3(x - 0.5)^3 \quad (29)$$

$$a_0 = -3.7500; a_1 = 0.000000; a_2 = 5.000000; a_3 = -3.000000 \quad (30)$$

$$x \in [1.50, 2.50] P_6(x) = a_0 + a_1(x - 1.5) + a_2(x - 1.5)^2 + a_3(x - 1.5)^3 \quad (31)$$

$$a_0 = -1.000000; a_1 = 1.000000; a_2 = 10.7500; a_3 = -7.5000 \quad (32)$$

$$x \in [2.50, 3.00] P_7(x) = a_0 + a_1(x - 2.5) + a_2(x - 2.5)^2 + a_3(x - 2.5)^3 \quad (33)$$

$$a_0 = 2.5000; a_1 = 0.000000; a_2 = 8.000; a_3 = -12.0000 \quad (34)$$

$$(35)$$

O gráfico da função polinomial por pedaços que interpola os dados pode ser vista na figura (fig. 2) página 6,

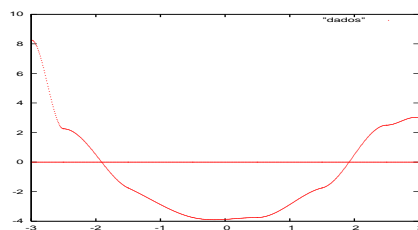


Figura 2: Quase-splines de grau três

O valor da integral é a soma das integrais dos polinômios, calculada no intervalo em que o polinômio estiver definido. Se f representa o quase splines, então

$$\int_{-3}^3 f(x)dx = \sum_{k=0}^7 \int_{x_k}^{x_{k+1}} P_k(x)dx = -4.58333$$

e a integral foi calculada com o pacote `aproximacao.c` que se encontra na página.

Solução 5 Exercício 3, página 2 Como P é um produto de monômios, a sua derivada pode ser calculada pela regra da derivada do produto

$$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$$

$$\begin{aligned} P'(x) &= (x - a_1)'(x - a_2)(x - a_3) + \\ &\quad + (x - a_1)(x - a_2)'(x - a_3) + \\ &\quad + (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)' = \\ &= (x - a_2)(x - a_3) + (x - a_1)(x - a_3) + (x - a_1)(x - a_2) \end{aligned}$$

uma soma de produtos de dois termos (falso: são três termos, mas um dos termos é a unidade, a derivada de $(x - a_k)$). Aparentemente dividimos P por cada um dos fatores para obter os termos com apenas dois fatores, o que nos permite escrever

$$P_k(x) = \frac{P(x)}{x - a_k}$$

e finalmente que

$$P' = P_1 + P_2 + P_3$$

Solução 6 Exercício 4, página 2

1. Generalização da regra do produto para derivadas: Se tivermos n funções no produto

$$f = \prod_{k=1}^n u_k \tag{36}$$

então f' é uma soma de n parcelas, em cada uma destas parcelas substituiremos, sucessivamente, cada fator por sua derivada:

$$f' = \sum_{k=1}^n u_k' \prod_{j \neq k} u_j \tag{37}$$

Observe que no produtório, em cada parcela, excluimos u_k para colocar em seu lugar u_k' . Esta expressão poderia também ser escrita assim

$$f' = \sum_{k=1}^n \prod_{j \neq k} u_j u_k' \tag{38}$$

Cada termo na soma $P'(x)$ foi obtido como se tivéssemos dividido por cada um dos fatores, sucessivamente. Assim o termo P_k , em $P'(x)$ poderia ser interpretado como $\frac{P(x)}{(x-a_k)}$.

Como cada termo, na soma, equação (38), é um polinômio de grau $n-1$, então f' é um polinômio de grau (no máximo) $n-1$. Neste caso será um polinômio de grau $n-1$, de acordo com a regra de derivação, a derivada de um polinômio de grau n é um polinômio de grau imediatamente inferior.

2. Provando que $P'(a_k)$ é diferente de zero, para todas as raízes.

P' é uma soma, dos polinômios P_k que são produtos em que “falta” o fator $x - a_k$ logo $P_k(a_k) \neq 0$, mas todos os outros termos, P_j , têm o fator $x - a_k$, logo

$$P_j(a_k) = 0 ; j \neq k$$

então a soma, calcula no ponto a_k se reduz a um termo: $P_k(a_k)$ que é diferente de zero, mais exatamente:

$$P'(a_k) = P_k(a_k)$$

3. O caso das raízes múltiplas não interessa quando estudamos a interpolação pelo método de Lagrange, não tem sentido, porque queremos interpolar uma sucessão de pontos no plano que se encontram sobre o gráfico de uma (hipotética) função e não tem sentido um mesmo ponto aparecer duas vezes, como se colocássemos dois sensores sobre o mesmo ponto, para fazer medidas diferentes. Este exemplo apenas serve para reforçar o entendimento da derivada ser zero em cima cada uma das raízes quando elas formam uma sucessão estritamente crescente de pontos.

Se houver uma raiz múltipla, isto significa, (considere a raiz múltipla sendo a_k) que teremos pelo menos o fator $(x - a_k)(x - a_k)$. Quando derivarmos teremos dois polinômios obtidos com este termo:

$$P_k(x) = 2(x - a_k)' \Pi_{j=1}^n (x - a_j) = 2 \Pi_{j=1}^n (x - a_j)$$

e conseqüentemente $P_k(a_k) = 0$. Como $P_j(a_k) = 0$ pela mesma razão da justificação anterior, então a soma, que define a derivada, é zero quando houver raízes múltiplas.

4. Vamos calcular o valor de $f(a_1)$

considerando a definição $f(x) = \sum_{k=1}^3 \frac{P_k(x)}{P'(a_k)}$

Já vimos que $P'(a_k) = P_k(a_k)$. Fazendo $x = a_1$ na soma tem-se $f(a_1) = \sum_{k=1}^3 \frac{P_k(a_1)}{P'(a_k)}$ mas já vimos que $P_k(a_j) = 0$ quando $j \neq k$ então resta, da soma apenas um termo: $f(a_1) = \frac{P_1(a_1)}{P_1(a_1)} = 1$

e assim f , que é polinômio de grau dois (uma unidade menor do que o índice da soma), é constante, 1, em três pontos diferentes então é idênticamente 1.

O caso geral é semelhante: f é um polinômio de grau $n - 1$ que é constante, em n pontos, logo é a função constante 1, a equação de f é

$$f(x) = 1$$

Solução 7 *Exercício 4e, página 3* Vamos escrever a expressão do polinômio de Lagrange neste caso particular, apenas a expressão algorítmica que pode ser usada diretamente num programa dentro de um loop.

A expressão $f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{y_k P_k(x)}{P'(a_k)}$ deve ser comparada com a que definiu a função f constante 1 na questão anterior. A diferença agora é o coeficiente y_k , a abcissa genérica de um dos pontos quaisquer da lista

$$\{(-3, 1), (-2.5, 0), (-1.5, 2), (-0.5, 3), (0.5, 3), (1.5, 1), (2.5, -2), (3, 4)\}$$

Se calcularmos $f(a_k)$, repetiremos as constas que fizemos na questão anterior:

$$f(a_k) = y_k \frac{P_k(a_k)}{P_k(a_k)} = \frac{y_k P_k(a_k)}{P_k(a_k)} = y_k$$

Temos assim um polinômio de grau $n - 1$ que no ponto a_k vale y_k , ou, em outras palavras, um polinômio de grau $n - 1$ que passa em cada um dos n pontos (a_k, y_k) - um polinômio que interpola estes pontos. A equação deste polinômio sendo

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{y_k P_k(x)}{P'(a_k)}$$

este é o polinômio de Lagrange que interpola os pontos. Veja o algoritmo em `gnuplot`

```
P(x) = (x+3)*(x+2.5)*(x+1.5)*(x+0.5)*(x-0.5)*(x-1.5)*(x-2.5)*(x-3)
P1(x) = (x+2.5)*(x+1.5)*(x+0.5)*(x-0.5)*(x-1.5)*(x-2.5)*(x-3)
P2(x) = (x+3)*(x+1.5)*(x+0.5)*(x-0.5)*(x-1.5)*(x-2.5)*(x-3)
P3(x) = (x+3)*(x+2.5)*(x+0.5)*(x-0.5)*(x-1.5)*(x-2.5)*(x-3)
P4(x) = (x+3)*(x+2.5)*(x+1.5)*(x-0.5)*(x-1.5)*(x-2.5)*(x-3)
P5(x) = (x+3)*(x+2.5)*(x+1.5)*(x+0.5)*(x-1.5)*(x-2.5)*(x-3)
P6(x) = (x+3)*(x+2.5)*(x+1.5)*(x+0.5)*(x-0.5)*(x-2.5)*(x-3)
P7(x) = (x+3)*(x+2.5)*(x+1.5)*(x+0.5)*(x-0.5)*(x-1.5)*(x-3)
P8(x) = (x+3)*(x+2.5)*(x+1.5)*(x+0.5)*(x-0.5)*(x-1.5)*(x-2.5)
dP(x) = P1(x)+ P2(x)+ P3(x)+ P4(x)+ P5(x)+ P6(x)+ P7(x)+ P8(x)
set xrange [-4:4]
plot P(x),dP(x),0
f(x) = P1(x)/dP(-3) + P2(x)/dP(-2.5) + P3(x)/dP(-1.5) + P4(x)/dP(-0.5) + \
      P5(x)/dP(0.5) + P6(x)/dP(1.5)+ P7(x)/dP(2.5) + P8(x)/dP(3)
plot f(x),0
g(x) = (x**2 - 9)*sin(2*x)
h(x) = g(-3)*P1(x)/dP(-3) + g(-2.5)*P2(x)/dP(-2.5)+ g(-1.5)*P3(x)/dP(-1.5) + \
```

```
g(-0.5)*P4(x)/dP(-0.5) + g(0.5)*P5(x)/dP(0.5) + \
g(1.5)* P6(x)/dP(1.5)+ g(2.5)*P7(x)/dP(2.5) + g(3)*P8(x)/dP(3)
plot h(x),g(x),0
```

este algoritmo faz uma comparação aproximando a função

$$g(x) = (x * 2 - 9) * \sin(2 * x)$$

com o polinômio de Lagrange que interpola alguns pontos do gráfico da função. Você pode encontrar este algoritmo na página, o nome do arquivo é "lagrange.gnuplot".

Solução 8 Exercício 4f, página 3

1. Como P é um produto de n termos, então sua derivada, pela regra do produto será uma soma de n termos, cada um destes termos sendo obtido com a derivação de um dos fatores de P , de cada vez. Como os fatores são monômios da forma $(x - a_k)$ cuja derivada é 1, aparentemente ao derivar este termo, dividimos P por este fator, tendo como resultado um produto dos $n - 1$ restantes. Definimos assim,

$$P_k(x) = \frac{P(x)}{x - a_k}$$

e

$$P' = \sum_{k=1}^n P_k$$

Como cada P_k foi obtido eliminando-se um dos fatores de P então, tendo apenas $n - 1$ fatores do primeiro grau, é um polinômio do grau $n - 1$, para cada valor de k . O que coincide com a regra de derivação, sendo P um polinômio de grau n , a sua derivada será um polinômio de grau $n - 1$, a soma dos polinômios P_k .

2. Se $k \neq j$ então o polinômio P_j tem o fator $x - a_k$ e portanto $P_j(a_k) = 0$ e por outro lado $P_k(a_k) \neq 0$ conseqüentemente

$$P'(a_k) = P_k(a_k)$$

porque todos os outros termos se anulam e

$$P'(a_k) = P_k(a_k) \neq 0$$

3. Se houver alguma raiz múltipla, digamos a_k então o fator $x - a_k$ aparece em todas as parcelas da derivada que assim se anulam em $x = a_k$ e portanto $P'(a_k) = 0$. Basta que seja uma raiz dupla, por exemplo, que o fato $(x - a_k)^2$ apareça na fatoração de P . Então quando este fator for derivado teremos

$$2(x - a_k)$$

em vez de 1 o que fará que o fator $x - a_k$ apareça em todas as parcelas da derivada P' e portanto ela se anulará em $x = a_k$. Veremos que a distinção das raízes será crucial na construção do polinômio de Lagrange.

4. Como

- $P'(a_k) = P_k(a_k)$
- $k \neq j$ implica que $P_k(a_j) = 0$

então $\frac{P_k(a_k)}{P'(a_k)} = 1$ fazendo que com que a função

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{P_k(x)}{P'(a_k)}$$

seja 1 sobre cada um dos nós a_k .

Como f é uma soma de polinômios de grau $n-1$ então f é um polinômio de grau no máximo $n-1$, que é constante, igual 1, em n pontos, então f é identicamente 1,

$$f(x) = 1$$

5. Agora se modificarmos a expressão de f escrevendo

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{y_k P_k}{P'(a_k)}$$

então, pelo raciocínio acima, $f(a_k) = y_k$ fazendo que o gráfico de f passe pelo ponto (a_k, y_k) . Como f é um polinômio de grau menor ou igual a $n-1$, obtivemos assim um polinômio com grau máximo $n-1$, o polinômio de Lagrange, interpolando os pontos

$$(a_1, y_1), \dots, (a_n, y_n)$$

Veja na figura (fig. 3) página 12, o polinômio de Lagrange interpolando os pontos

$$\{(-3, 1), (-2.5, 0), (-1.5, 2), (-0.5, 3), (0.5, 3), (1.5, 1), (2.5, -2), (3, 4)\}$$

A construção foi feita com Gnuplot e se encontra no arquivo `exer08_01.gnuplot`.

Referências

- [1] Um algoritmo para calcular e fazer o gráfico de polinômio dadas quatro condições.

Procure “sistema” no link *programas*, na página da disciplina.

<http://calculo-numericosobralmatematica.org/>

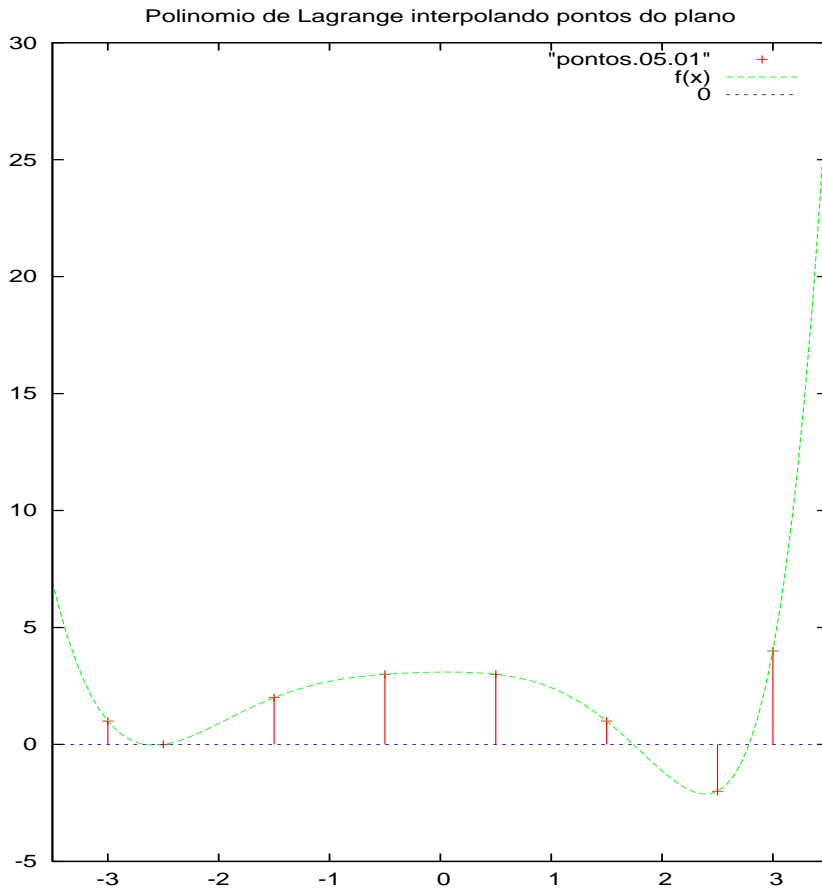


Figura 3: Interpolação de Lagrange de pontos do plano

- [2] Praciano-Pereira, T. *Cálculo Numérico Computacional* T. Praciano-Pereira edição eletrônica preliminar, procure *textos*, na página da disciplina <http://calculo-numeric.sobralmatematica.org/>
Versão em uma página por folha A4 ananu00.pdf ou versão em duas página por folha A4, ananu00_2p.pdf
- [3] Praciano-Pereira, T *Programas para Cálculo Numérico*
<http://www.4shared.com/dir/3801087/2fa7cabd/programas.html>
Procure *programas*, na página da disciplina <http://calculo-numeric.sobralmatematica.org/>
- [4] *A enciclopédia livre na Internet - Wikipédia*

<http://encyclopedia.thefreedictionary.com/>

<http://en.wikipedia.org/>

<http://pt.wikipedia.org>