

Cálculo Numérico Computacional **Lista 06**  
**assunto: recursividade**      tarcisio@member.ams.org  
 T. Praciano-Pereira      **Dep. de Matemática**  
**alun@:**  


---

 Univ. Estadual Vale do Acaraú      2 de dezembro de 2007

Por favor, prenda esta *folha de rosto* na sua solução desta lista, deixando-a em branco. Ela será usada na correção. Se você quiser entregar o trabalho eletronicamente, use, na página da disciplina, o link “entrega de trabalhos” e, por favor, siga as instruções sobre nomes de arquivos:

num\_curso\_seunome\_XX.pdf

em que

$$curso \in \{edo, mat, com\}$$

de acordo com a sua matrícula na disciplina, XX é 06 para esta lista, e pdf é o tipo de formatação que você der ao seu trabalho.

Data da entrega da lista: dia 10 de Dezembro, segunda-feira.

**Observação:** A data de entrega é apenas uma sugestão para que você se mantenha em dia, o calendário acadêmico está suspenso devido à greve dos professores.

## 1 Teoria

**palavras chave:** sucessões recursivas, funções recursivas, raízes de uma função, algoritmo dos babilônios, aproximação polinomial.

### 1.1 Objetivo

Estou dedicando esta lista, ainda, a um aprofundamento das técnicas de programação, vou completar alguns detalhes relativos à determinação de raízes de uma função salientando o *aspecto recursivo* dos algoritmos. Recursividade é o ponto central. Mas vou repassar todos os pontos anteriores e introduzir aproximação polinomial.

Como em todas as lista de exercícios anteriores, o objetivo é lhe dar uma oportunidade de experimentar usando **gnuplot** e alguma linguagem de programação. Não perca a oportunidade, experimente e relate o resultado do experimento. A lista de exercícios é um relatório de atividades.

### 1.2 Recursividade

Vimos que a raiz aproximada de uma função, pelo método da tangente era o *termo geral de uma sucessão*

$$s_0 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}, s_1 = s_0 - \frac{f(s_0)}{f'(s_0)} \quad (1)$$

de onde podemos deduzir por *indução finita* que

$$s_n = s_{n-1} - \frac{f(s_{n-1})}{f'(s_{n-1})} = F(s_{n-1}) \quad (2)$$

em que

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad (3)$$

O que chamamos de *raíz aproximada* é o termo  $s_n$  para um valor do índice,  $n$ , escolhido.

Se abstrairmos a expressão particular que  $F$  tem, podemos dizer simplesmente que

$$s_n = F(s_{n-1}) \quad (4)$$

ou seja, a sucessão  $s_0, s_1, \dots, s_n, \dots$  é definida em termos dela própria.

Um outro exemplo clássico de sucessão recursiva é a *sucessão de Fibonacci*, faça uma busca na **Internet** e leia a respeito, visite [3, procure Fibonacci], por exemplo.

As sucessões recursivas são extremamente efetivas como método matemático mas também extremamente consumidoras de memória em programas de computação, deste modo devemos ter cuidado para fazer um uso equilibrado deste instrumento em programas. Um dos cuidados deve consistir na colocação de um *teto de ciclos recursivos* quando definirmos uma função recursivamente. Um exemplo disto está aqui, [2, `raizes.c`].

A *natureza* é recursiva! O funcionamento das células num organismo biológico é recursivo, os *fractais* são um exemplo de recursidade. Portanto, *recursividade* é importante.

Se você fizer o exercício 8 posso dizer que você está aproveitando bem o seu tempo durante a greve.

## 2 Exercícios

### 1. raiz secante

- Mostre que a sucessão das raízes aproximadas de uma função  $f$ , num intervalo em que  $f$  troque de sinal, pelo método da secante é uma sucessão recursiva.
- Escreva a expressão recursiva  $F$  de acordo com a equação (4) que define a raiz por secância.
- Escreva um programa que encontre recursivamente a raiz por secante. Sugestões: escreva primeiro a expressão matemática e depois traduza com um algoritmo computacional, use o operador `=` em C ou `:=` em Pascal.

### 2. Raiz pela tangente

- Repita a questão anterior para a raiz por tangência.
- (\*\*) Observe que a função  $F$ , equação (4), é contínua se  $f'$  for diferente de zero no intervalo  $[a, b]$  em que for observada a mudança de sinal de  $f$ . Justifique isto e indique quando  $F$  é também diferenciável.

#### (c) Teoria:

O exercício consiste na leitura do texto e na demonstração de todas as afirmações que o texto fizer. Entenda a palavra “demonstração” como *forma de convencimento lógico* daquilo que se espera que seja verdade. Não sofra inutilmente! Se você estiver convencido de que uma afirmação é verdadeira, tente justificá-lo, e vá em frente.

As funções contínuas *preservam o limite*:

$$F(\lim_n s_n) = \lim_n (F(s_n)) \quad (5)$$

e como  $F(s_n) = s_{n+1}$  então se a sucessão  $s$  tiver limite teremos

$$F(l) = F(\lim_n s_n) = \lim_n s_{n+1} = l \quad (6)$$

é a interseção do gráfico de  $F$  com a primeira bissetriz  $y = x$ .

- Considere a função  $f(x) = \sin(\sqrt{2}x - 3)$  e escreva a equação de  $F$ , equação (4), neste caso.
- Encontre um intervalo adequado (observando os zeros da derivada) para determinar graficamente algum zero da função  $f$ . Determine todos os zeros de  $f$ , analisando o gráfico, no intervalo  $[-10, 10]$ .

Sugestões: Use `gnuplot` na definição de  $F$  para ver o gráfico, se der problema, analise qual foi o problema que deu, analise, por exemplo, se  $f'(x)$  é zero no interior do intervalo em que você estiver fazendo o gráfico. Faça o gráfico conjunto de  $F, f, f'$ . Não tema, dificilmente você poderá estragar `gnuplot` ou o computador.

- Escreva um programa que calcule o termo de ordem  $n$  da sucessão de Fibonacci.
- Escreva um programa que escreva todos os termos da sucessão que aproxima a raiz de  $f$  pelo método da tangente, recursivamente, até o teto  $n$ . Você encontra um exemplo aqui [2, `raizes.c`], leia direto a função `raiz_tangente()` e perca o medo da linguagem C.
- Escreva um programa que escreva todos os termos da sucessão que aproxima a raiz de  $f$  pelo método da secante, recursivamente, até o teto  $n$ . Você encontra um exemplo aqui [2, `raizes.c`], leia direto a função `raiz_secante()` e perca o medo da linguagem C.
- Considere uma sucessão  $s_n$  definida pelas seguintes leis
  - $s_0 = -4$
  - $s_n = s_{n-1} + 1$

Escreva um programa que calcule um termo qualquer  $s_n$  pedindo ao usuário do programa que lhe forneça o índice desejado.

- Desigualdade importante - Média aritmética é maior do que a média geométrica. Estude a demonstração:

$$\text{Sejam } a, b \geq 0 \quad (7)$$

$$\sqrt{ab} \geq \frac{a+b}{2} \quad (8)$$

$$2\sqrt{ab} \geq a + b \quad (9)$$

$$4ab \geq (a + b)^2 \quad (10)$$

$$0 \leq (a - b)^2 \quad (11)$$

Partimos da equação (8) sem sabermos se podíamos usar “ $\leq$ ” ou “ $\geq$ ” entre os dois membros. Usamos o sinal “?” em lugar de uma das duas

desigualdades. Todas as operações até a equação (11) são logicamente equivalentes, como na equação (11), vale “ $\leq$ ” entre os membros da desigualdade, então podemos substituir “?” por  $\leq$  em todas as equações, em particular na equação equação (8) onde temos a afirmação que desejamos demonstrar:

$$\text{m\u00e9dia geom\u00e9trica } \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \text{ m\u00e9dia aritm\u00e9tica}$$

8. (\*\*\*) Algoritmo dos babil\u00f4nios Voc\u00ea encontra no livro-texto, [1, p\u00e1gina 61] mais informa\u00e7\u00f5es sobre este algoritmo. A id\u00e9ia \u00e9 *recursiva*.

Os itens abaixo v\u00e3o conduzi-l\u00e0 a compreender como os babil\u00f4nios descobriram o m\u00e9todo.

- (a) Uma aproxima\u00e7\u00e3o para come\u00e7ar Verifique (experimente com alguns exemplos) que  $\frac{1+a}{2}$  \u00e9 uma aproxima\u00e7\u00e3o de  $\sqrt{a}$ . Se  $a = 4$  \u00e9 uma “boa aproxima\u00e7\u00e3o”, se  $a = 100$  \u00e9 uma “aproxima\u00e7\u00e3o muito ruim”, (mas \u00e9 uma aproxima\u00e7\u00e3o). Considere outros exemplos.
- (b) Suponha que  $x$  seja uma aproxima\u00e7\u00e3o para  $\sqrt{a}$ . Verifique que as afirma\u00e7\u00f5es seguintes s\u00e3o verdadeiras:

$$\text{Se } x > \sqrt{a} \text{ \u00e9nt\u00e3o } \frac{a}{x} < \sqrt{a} \quad (12)$$

$$\text{Se } x < \sqrt{a} \text{ \u00e9nt\u00e3o } \frac{a}{x} > \sqrt{a} \quad (13)$$

$$\text{Conclus\u00e3o: } \sqrt{a} \text{ fica entre } x, \frac{a}{x} \quad (14)$$

- (c) Verifique que

- (1)  $\sqrt{a}$  \u00e9 a m\u00e9dia geom\u00e9trica entre

$$x, \frac{a}{x}$$

logo

- (2)

$$\sqrt{a} < \frac{x + \frac{a}{x}}{2} = g(x)$$

- (d) Defina de agora em diante

$$g(x) = \frac{x + \frac{a}{x}}{2}$$

uma vez que sempre  $x \neq 0$ . Verifique (justifique), se  $x$  for uma aproxima\u00e7\u00e3o de  $\sqrt{a}$  \u00e9nt\u00e3o  $g(x)$  estar\u00e1 na metade de um dos intervalos

$$\left[x, \frac{a}{x}\right] \text{ ou } \left[\frac{a}{x}, x\right]$$

- (e) N\u00e3o importa se  $x < \sqrt{a}$  ou  $x > \sqrt{a}$  sempre

$$g(x) > \sqrt{a};$$

$$\frac{a}{g(x)} < \sqrt{a};$$

$$g(g(x)) = \frac{g(x) + \frac{a}{g(x)}}{2} > \sqrt{a};$$

- (f) Vou definir  $d = \text{medida}\left(x, \frac{a}{x}\right)$ .

Justifique as afirma\u00e7\u00f5es:

- O erro na aproxima\u00e7\u00e3o de  $\sqrt{a}$  por  $g(x)$  \u00e9  $\frac{d}{2}$ .
- Como  $s_0 = g(x)$  \u00e9 uma aproxima\u00e7\u00e3o de  $\sqrt{a}$  melhor do que  $x$  (por que ?) \u00e9nt\u00e3o  $s_1 = g(g(x))$  \u00e9 uma aproxima\u00e7\u00e3o com erro  $\frac{d}{4}$ .
- Este m\u00e9todo define uma sucess\u00e3o de tipo *de Cauchy* cujos termos est\u00e3o distantes entre si como os termos da sucess\u00e3o  $\frac{d}{2^n}$  que converge para zero rapidamente. As sucess\u00f5es *de Cauchy* s\u00e3o intrinsecamente convergentes (isto \u00e9 uma bobagem, porque toda sucess\u00e3o convergente de n\u00fameros reais \u00e9 *de Cauchy*, deixa de ser bobagem em espa\u00e7os mais gerais).
- Justifique o limite:

$$s_n = g(s_{n-1}) \rightarrow \sqrt{a}$$

- (g) Experimente com `calc` ou `gnuplot` para calcular a raiz quadrada de alguns n\u00fameros usando este m\u00e9todo. Inclua no seu relat\u00f3rio a lista de comandos que voc\u00ea tiver usado.
- (h) Escreva um programa que calcule uma aproxima\u00e7\u00e3o da raiz quadrada de  $a$  usando o m\u00e9todo dos babil\u00f4nios. Teste o programa e o inclua no seu relat\u00f3rio.
- (i) Verifique que a raiz quadrada \u00e9 o ponto determinado pela interse\u00e7\u00e3o do gr\u00e1fico de  $F$  com a primeira bissetriz. Calcule, graficamente,  $\sqrt{7}$  usando este m\u00e9todo.

9. Aproxima\u00e7\u00e3o polinomial Voc\u00ea encontra no livro-texto, [1, p\u00e1ginas 78-86] as informa\u00e7\u00f5es iniciais sobre aproxima\u00e7\u00e3o polinomial.

Escreva a equa\u00e7\u00e3o de um polin\u00f4mio que passe pelos pontos

$$(-3, 4), (-1, 7), (3, -2), (5, 9)$$

A quest\u00e3o fala de “um polin\u00f4mio”, pode ter mais de um ?

10. Fa\u00e7a uma lista dos t\u00f3picos que voc\u00ea j\u00e1 estudou de C\u00e1lculo Num\u00e9rico com um breve coment\u00e1rio mostrando o que voc\u00ea sabe a respeito dos mesmos. D\u00ea exemplos mostrando a correla\u00e7\u00e3o entre os t\u00f3picos estudados.

## Referências

- [1] Praciano-Pereira, T. *Cálculo Numérico Computacional* T. Praciano-Pereira edição eletrônica preliminar *anadu00\_2p.pdf*  
[http://www.4shared.com/dir/1981188/d2693456/calculo\\_numerico.html](http://www.4shared.com/dir/1981188/d2693456/calculo_numerico.html)
- [2] Praciano-Pereira, T. *Programas para Cálculo Numérico*  
<http://www.4shared.com/dir/3801087/2fa7cabd/programas.html>
- [3] *A enciclopédia livre na Internet - Wikipédia*  
<http://encyclopedia.thefreedictionary.com/>  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci\\_number](http://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci_number)