

Cálculo Numérico Computacional    Exercícios lista 05  
Ap. de Raízes aproximadas    MinMax e curva de nível  
Prof. Tarcísio Praciano-Pereira    Dep. de Matemática  
tarcisio@member.ams.org

---

---

aluno:

Univ. Estadual Vale do Acaraú    Sobral, 28 de fevereiro de 2007

Por favor, prenda esta folha de rosto na sua solução desta lista deixando-a em branco. Ela será usada para a correção.

### Exercícios 1 Extremos de funções e seus gráficos

Aplicação da determinação aproximada das raízes, aplicação do diferencial total para determinação de curvas de nível (aproximadamente).

#### 1. Derivada e extremos

Onde a derivada de uma função se anular, aí se encontram, possivelmente, os extremos (máximo ou mínimo) da função.

Considere

- Calcule sua derivada e encontre os intervalos onde ela troca de sinal. Determine com um erro menor do que 0.01 as raízes da derivada.
- Encontre também com erro menor do 0.01 as raízes de  $f$ .
- Usando estas informações (justificamente) faça um esboço gráfico de  $f$  (a mão).
- Compare com o gráfico feito por Gnuplot e corrija os seus cálculos se for necessário.

2. Reta secante e zeros Suponha que uma função contínua troque de sinal no intervalo  $[a, b]$ . Considere que  $x_1$  é o zero da reta secante que passa nos pontos

$$(a, f(a)), (b, f(b))$$

- Use um gráfico e se convença de que  $x_1$  é uma aproximação da raiz de  $f$  e justifique.
- Prove que se  $f$  troca de sinal no intervalo  $[a, b]$  e  $x_1 \in [a, b]$   $x_1$  for o zero da reta secante que passa nos pontos

$$(a, f(a)), (b, f(b))$$

então uma das afirmações seguintes deve é verdadeira é verdadeira:

- $f$  troca sinal em  $[a, x_1]$
- $f$  troca sinal em  $[x_1, b]$

No caso verdadeiro verifique que nova reta secante pode ser traçada determinando assim um novo zero aproximado, chame-o  $x_2$ .

- Repita o processo descrito acima para encontrar uma sucessão

$$x_3, x_4, x_5, x_6$$

de zero aproximados para  $f$ . Escreva a fórmula para  $x_n$  neste algoritmo.

- Descreva, de forma algorítmica (escreva um programa), o método para calcular aproximadamente uma raiz de  $f$  no intervalo  $[a, b]$  usando esta sucessão de secantes e de raízes das secantes.

(e) Use o método da secante para encontrar os zeros de  $f'$  se

$$f(x) = \text{sen}(x)/(1+x^2)$$

com erro menor do que 0.01.

3. Busca binária. Este método oferece uma alternativa poderosa ao método da secante. Na descrição feita no exercício no. 2, substitua no cálculo do zero da reta secante o ponto  $x_1$  é o ponto médio do intervalo  $[a, b]$  e sucessivamente  $x_1$  será o ponto médio de um dos intervalos  $[a, x_1]$  ou  $[x_1, b]$  conforme haja troca de sinal.

Use o método de busca binária para encontrar os zeros de  $f'$  se

$$f(x) = \text{sen}(x)/(1+x^2)$$

com erro menor do que 0.01.

4. Análise de algoritmo. Coloque um contador nos programas que você tiver usado para os métodos da secante e da busca binária e faça um relatório comparativo dos métodos com o número de iterações necessárias em cada método para obter a precisão estipulada. Conclua se um dos métodos é mais efetivo e justifique sua conclusão com os dados estatísticos produzidos.

5. Resolvendo  $F(x, y) = c$ . Considere uma função numa região retangular do plano onde ela está definida e é continuamente derivável.

- (a) Descreva como podemos fazer uma varredura desta região retangular para determinar uma família finita de soluções da equação (curva de nível)  $F(x, y) = c$ . Escreva o algoritmo.
- (b) Melhore o algoritmo com uma varredura fina a partir de cada intervalo onde houve uma solução afim de produzir uma solução mais precisa.
- (c) O problema  $F(x, y) = c$  é uma curva de nível. Encontrada uma solução por varredura, podemos usar a equação reta dedutível do diferencial total

$$dz = 0 = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy$$

substituindo

$$m = -\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial y} \quad (1)$$

$$dx := x - a \quad (2)$$

$$dy := y - b \quad (3)$$

$$y = b + m(x - a) \quad (4)$$

em que  $(a, b)$  é uma das soluções aproximadas encontrada por varredura. Descreva como podemos calcular uma poligonal que represente uma solução aproximada do problema  $F(x, y) = c$ . Veja na figura (1) página 4,

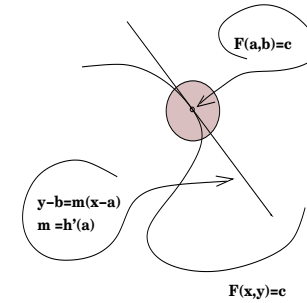


Figura 1: A reta tangente no ponto

Veja um exemplo de poligonal, com baixa aproximação na figura (2) página 4,

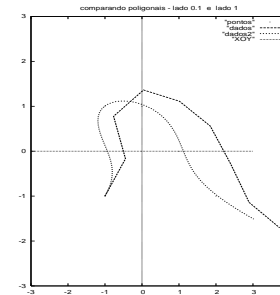


Figura 2: Poligonal - solução aproximada - curva de nível

- (d) Encontre a curva de nível (faça um gráfico)

$$x^2 + 3xy + y^3 = 5$$