Cálculo Numérico Computacional | **Lista 02**
Polinômio de Taylor | tarcisio@member.ams.org
T. Praciano-Pereira | **Dep. de Matemática**

alun@:

Univ. Estadual Vale do Acaraú | 26 de outubro de 2007

Por favor, prenda esta *folha de rosto* na sua solução desta lista, deixando-a em branco. Ela será usada na correção.

0.1 Resumo teórico.

Relembrando: Fórmula de Taylor A equação da reta tangente

$$y = f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) = b + m(x - a) \tag{1}$$

é a equação de um polinômio do primeiro grau tangente ao gráfico de f. Observe que a equação (1) é a equação de um polinômio desenvolvido no ponto $\underline{x = a}$[1]. Descobrimos b e m impondo as condições:

$$b = f(a) \tag{2}$$
$$m = f'(a) \tag{3}$$

A reta tangente é um polinômio do primeiro grau tangente ao gráfico de uma função.

Vamos explorar este método nesta lista de exercícios com o objetivo de determinar o melhor polinômio tangente ao gráfico de uma função, de grau dois ou três, queremos encontrar

$$P(x) = A + B(x - a) + C(x - a)^2 + D(x - a)^3 \tag{4}$$

e por analogia com as equações (2), (3) devemos ter condições envolvendo a segunda e a terceira derivada de f.

Você deve usar `gnuplot` para obter todos os gráficos, mas deve apresentar toda a justificação das equações que usar.

O comando do gnuplot para fazer gráficos de funções de duas variáveis é `splot f(x,y)`

palavras chave: Polinômio de Taylor, média aritmética ponderada,

0.2 Exercícios

Exercícios 1 *Polinômio de Taylor*

1. *Média aritmética ponderada Tudo que sabemos sobre uma função contínua*

$$f : [a, b] \to \mathbf{R} \tag{5}$$

é que $f(a) = -3; f(b) = 9$. Suponha além disto que $a < 0 < b$. Decida quais das afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas justificando a sua decisão:

(a) *f pode nunca se anular no intervalo $[a, b]$;*

(b) *em algum ponto $c \in (a, b)$ temos $f(c) = 0$;*

[1] Discuta com o professor (ou com os seus colegas) o que é *um polinômio desenvolvido no ponto* $\underline{x = a}$

(c) $f(0) = 0$;

(d) uma boa hipótese para o valor $f(0)$ é

$$\frac{f(b) + f(a)}{2};$$

(e) uma boa hipótese para o valor $f(0)$ é

$$sf(b) + tf(a); \; s = \frac{-a}{b-a}; \; t = \frac{b}{b-a};$$

(f) uma boa hipótese para o valor $f(0)$ é

$$sf(a) + tf(b); \; s = \frac{-a}{b-a}; \; t = \frac{b}{b-a};$$

(g) A integral de f é positiva;

(h) A integral de f pode ser positiva;

(i) A integral de f pode ser negativa;

(j) A integral de f é negativa;

(k) Em algum ponto $c \in (a, b)$ tem-se

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

(l) Se f for uma função diferenciável, em algum ponto $c \in (a, b)$ tem-se

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

2. *Valor experimental* Você selecionou na questão anterior, por alguma razão, um dos itens

(a) uma boa hipótese para o valor $f(0)$ é

$$sf(b) + tf(a); \; s = \frac{-a}{b-a}; \; t = \frac{b}{b-a};$$

(b) uma boa hipótese para o valor $f(0)$ é

$$sf(a) + tf(b); \; s = \frac{-a}{b-a}; \; t = \frac{b}{b-a};$$

Faça o gráfico de f, escolha a função, o intervalo, use `gnuplot` *e experimente as duas hipóteses, analise a decisão que você tomou anteriormente eventualmente alterando-a. Justifique a sua decisão.*

3. *Teórica - polinômio do segundo grau tangente* Expanda as equações (2), (3) para encontrar as equações de uma parábola (polinômio do segundo grau) tangente ao gráfico de f, memorizando também a curvatura (segunda derivada)

$$P(x) = A + B(x-a) + C(x-a)^2 \tag{6}$$

Um polinômio desenvolvido[2] no ponto $x = a$. Observe que você deve terminar os valores dos coeficientes A, B, C de forma adequada.

4. *Teórica - polinômio do terceiro grau tangente* Expanda as equações (2), (3) para obter as condições que façam de

$$P(x) = A + B(x-a) + C(x-a)^2 + D(x-a)^3 \tag{7}$$

um polinômio do terceiro grau, tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$.

Descreva as equações para determinarmos os coeficientes A, B, C, D.

5. *Fórmula de Taylor*

(a) Ache o desenvolvimento de Taylor para $f(x) = sen(x)$ no ponto $x = 0$ de ordem 7 (grau 7) (um polinõmio de grau 7).

(b) Ache o desenvolvimento de Taylor para $g(x) = cos(x)$ no ponto $x = 0$ de ordem 8 (grau 8), (um polinõmio de grau 8). Analise porque a diferença de grau entre esta questão e anterior.

(c) Calcule a derivada[3] de $g(x) + if(x)$, com os polinômios encontrados no item anterior. Será que o resultado poderia ser interpretado como sendo

$$(g(x) + if(x))' = i(g(x) + if(x))$$

6. *Aplicações*

(a) Calcule o valor aproximado de $sen(0.1)$ usando a fórmula de Taylor de ordem 7. Compare o resultado, indicando o erro ocorrido usando uma calculadora.

(b) Calcule o valor aproximado de $cos(0.1)$. Compare o resultado, indicando o erro ocorrido usando uma calculadora.

7. *Derivadas parciais* *introdução teórica* A equação de plano que passa no ponto (a, b, c) é, por comparação com a equação da reta,

$$z - c = A(x-a) + B(y-b) \tag{8}$$
$$z = c + A(x-a) + B(y-b) \tag{9}$$

[2] novamente, um polinômio desenvolvidono ponto x = a

[3] O número i que aparece na expressão abaixo, é apenas um número complexo, e as contas funcionam com eles como com qualquer número real, sem preconceitos ou complexos...

(a) *Calcule as derivadas parciais de $z = f(x, y)$ na equação (9).*

(b) *Justifique a afirmação seguinte usando os conceitos "tangente", "coeficiente angular" dentro de uma pequena redação.*

Se o plano cuja equação está em (8), for tangente ao gráfico de uma função no ponto $(a, b, f(a, b))$ então a equação do plano seria, atualizando os valores de c, A, B numa das equações *(8) ou (9):*

$$z - f(a, b) = A(x - a) + B(y - b) \tag{10}$$

$$z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - b) \tag{11}$$

(c) *Considere uma função*

$$z = f(x, y) \tag{12}$$

que seja derivável numa vizinhança do ponto $(a, b, f(a, b))$. Então ela tem um plano tangente[4] *no ponto $(a, b, f(a, b))$, semelhante ao caso da função univariada com a reta tangente. Identifique entre as equações a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(a, b, f(a, b))$ e justifique sua escolha.*

(d) *Sabendo que as taxas de variação parciais de $z = f(x, y)$ no ponto $(1, 2)$ são*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2; \frac{\partial f}{\partial y} = 3$$

e que $f(1, 2) = -5$

i. *Escreva a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 2, f(1, 2))$*

ii. *calcule aproximadamente*

$$f(1.1, 2.1)$$

(e) *<u>Fórmula de Taylor multivariada de grau 1</u> Observe que a equação do plano tangente pode ser escrita de forma semelhante á equação da reta tangente. Encontre as semelhanças e escreva a* fórmula de Taylor multivariada de grau 1. *Você vai precisar de um produto de matrizes (já ouviu falar do gradiente, da jacobiana ?). Em suas justificativas use estas palavras, gradiente, jacobiana.*

8. *<u>Polinômio</u> Esta é uma variante do método* polinômio de Taylor. *Podemos encontrar um polinômio que memoriza as informações de uma função de forma parecida com o polinõmio de Taylor, mas usando informações em dois pontos.*

(a) *Encontre um polinômio P desenvolvido no ponto $\underline{x = a}$ tal que*

- $P(a) = f(a); P'(a) = f'(a)$

[4]Esta afirmação equivale a dizer que f é derivável, como no caso univariado dizer que tem uma reta tangente equivale a dizer que função é derivável

- $P(b) = f(b); P'(b) = f'(b)$

em que $[a, b]$ é um intervalo em que f está definida e é derivável. Sugestão: escreva a expressão de um polinômio desenvolvido no ponto $\underline{x = a}$.

(b) *<u>Aplicação</u> Encontre polinômios tal que*

a) $P(-3) = 3$	$P'(-3) = -1$
$P(3) = 1$	$P'(3) = 1$

b) $P(-3) = -3$	$P'(-3) = 1$
$P(3) = -3$	$P'(3) = 1$

Faça os gráficos destes polinômio.