

Por favor, prenda esta *folha de rosto* na sua solução desta lista, deixando-a em branco. Ela será usada na correção.

Exercícios 1 Sol. aprox de equações diferenciais ordinárias

objetivo: Vamos aplicar o método das tangentes para encontrar soluções aproximadas de equações diferenciais. Há dois tipos de equações a que este método se aplica facilmente (com bons resultados)

- as equações do tipo $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$;
- as equações diferenciais exatas

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

Vamos tratar destes dois tipos de equações aqui.

metodo: Para cada tipo de equação vamos fazer um tutorial passando por algumas experiências e seguindo para o desenvolvimento computacional.

Em cada grupo de questões um pequeno texto-resumo da teoria antecede os quesitos. Há dois grupos de questões nesta lista.

Depois de cada grupo de questões um pequeno texto indica aplicações para o método.

palavras chave: Campo vetorial, equações diferenciais ordinárias, solução aproximada.

Campos vetoriais descrevem o fluxo que movem partículas num fluido, por exemplo, as moléculas de água num rio sobre o qual se pense construir uma ponte, ou do vento sobre uma região onde se espera coletar energia aeólica.

Em cada ponto da região temos vetores indicando o gradiente do campo, o vetor das derivadas parciais. Malhas mais finas ou mais grossas permitem uma visualização do campo de forças e a resolução, em geral, tem que ser decidida experimentalmente, este é um dos objetivos desta lista.

1. $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ Considere a expressão

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = x^2 + xy + y^2 \quad (1)$$

e uma malha de norma

$$\Delta x = 1 ; \Delta y = 1$$

no retângulo

$$[-3, 3] \times [-3, 3]$$

- (a) Em cada nó desta malha desenhe um vetor tangente de módulo

$$\frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{2}$$

(b) Coloque no arquivo ''dados'' os pares de pontos que determinam os vetores tangentes obtidos e visualize o resultado com `gnuplot` usando o comando

```
plot ''dados'' with lines
```

separando cada par de pontos com uma linha em branco (caso contrário `gnuplot` vai ligar todos os pontos).

(c) Faça um programa que crie o arquivo ''dados'' e que chame o `gnuplot` para visualizar o campo vetorial, não se esqueça de fazer o programa separar os pontos com linha em branco.

(d) O resultado desta experiência produz uma visualização do fluxo de

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + xy + y^2$$

na região considerada. Esta visualização pode ficar anulada tanto por uma precisão exagerada ou pobre, (uso de Δx , Δy muito pequenos ou muito grandes. Estude isto fazendo o gráfico com diferentes normas para a malha.

2. Refaça a questão anterior com

$$f(x, y) = \frac{y+3}{x-3} \quad (2)$$

na região $[-10, 10]$. Discuta o resultado.

exemplo de aplicação em vez de termos a expressão algébrica $f(x, y)$ na equação (1) podemos ter um arquivo semelhante ao ''dados'' obtido por sensores. O campo vetorial resultante descreve aproximadamente o fluxo de um fenômeno no retângulo observado. É o caso do fluxo de um rio, para determinarmos a melhor localização de uma ponte, dos pilares da ponte, embasamento etc... ou fluxo aélico para distribuição de cata-ventos em uma região.

3. Uma equação diferencial da forma

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (3)$$

se diz exata se houver uma função

$$z = F(x, y) \quad (4)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P ; \frac{\partial F}{\partial y} = Q \quad (5)$$

e isto pode ser testado com a igualdade (do meio na expressão):

$$\frac{\partial F^2}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial F^2}{\partial x \partial y} \quad (6)$$

As soluções de uma equação diferencial exata são as curvas de nível

$$F(x, y) = c \quad (7)$$

para constantes c admissíveis. Uma solução aproximada pode ser uma poligonal cujos lados são sucessivamente obtidos com a equação da reta tangente que pode ser deduzida da equação a partir de uma condição inicial $F(a, b) = c$

Considere a equação diferencial exata

$$2xy^2 dx + 2x^2 y dy = 0 \quad (8)$$

e a condição inicial $(a, b) = (-1, 1)$

(a) Construa uma poligonal com cinco lados, considerando inicialmente a reta que passa no ponto (a, b) usando a equação diferencial para definir o lado inicial e, em cada lado escolhendo um ponto "próximo" como nova condição inicial onde traçar novo segmento de reta tangente.

(b) Coloque os dados no arquivo ''dados'' e usando o comando

```
plot ''dados'' with lines
```

obtenha a poligonal-solução. Observe, não separe os pontos com linhas em branco para que `gnuplot` trace uma única poligonal.

(c) Faça um programa que produza uma poligonal com lados medindo δ de sua escolha (coloque os dados no arquivo ''dados'' e use `gnuplot` para traçar a poligonal.

4. Resolva aproximadamente (gráfico) a equação diferencial exata

$$x dx + y dy = 0 ; (a, b) = (0, 2) \quad (9)$$

solução exata é um círculo.

exemplos de aplicação você pode colocar um satélite em órbita com este método e com uma equação parecida com a equação (9). Este método também serve para construir pilotos automáticos para controlar navegação. Pode também ser usado para determinar o melhor leito para uma estrada numa região acidentada. São todos exemplos de curvas de nível.

Questão obrigatória Faça uma análise crítica dos objetivos e do método deste tutorial. Você não receberá nota por sua opinião mas é obrigado a emití-la, em outras palavras, você não corre riscos de perder pontos se manifestando negativamente sobre a disciplina ou sobre os métodos usados pelo professor.

Observe também que a sua análise força-l@-á a refletir sobre os métodos e portanto aprofundar a sua compreensão dos mesmos.