Cálculo Numérico Computacional	**Lista 08**
Equções diferenciais ordinárias - Sol. aprox.	
T. Praciano-Pereira	**Dep. de Matemática**
alun@:	
Univ. Estadual Vale do Acaraú	20 de abril de 2007

Por favor, prenda esta *folha de rosto* na sua solução desta lista, deixando-a em branco. Ela será usada na correção.

Exercícios 1 *Sol. aprox de equções diferenciais ordinárias*

objetivo: Vamos aplicar o método das tangentes para encontrar soluções aproximadas de equações diferenciais. Há dois tipos de equações a que este método se aplica facilmente (com bons resultados)

- *as equações do tipo* $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$;
- *as equações diferenciais exatas*

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

Vamos tratar destes dois tipos de equações aqui.

metodo: Para cada tipo de equação vamos fazer um tutorial passando por algumas experiências e seguindo para o desenvolvimento computacional.

Em cada grupo de questões um pequeno texto-resumo da teoria antecede os quesitos. Há dois grupos de questões nesta lista.

Depois de cada grupo de questões um pequeno texto indica aplicações para o método.

palavras chave: Campo vetorial, equações diferenciais ordinárias, solução aproximada.

Campos vetoriais descrevem o fluxo que movem partículas num flúido, por exemplo, as moléculas de água num rio sobre o qual se pense construir uma ponte, ou do vento sobre uma região onde se espera coletar energia aeólica.

Em cada ponto da região *temos vetores indicando o gradiente do campo, o vetor das derivadas parciais. Malhas mais finas ou mais grossas permitem uma visualização do campo de forças e a* resolução, *em geral, tem que ser decidida experimentalmente, este é um dos objetivos desta lista.*

1. $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ *Considere a expressão*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = x^2 + xy + y^2 \tag{1}$$

e uma malha de norma

$$\Delta x = 1 \ ; \ \Delta y = 1$$

no retângulo

$$[-3, 3] \ \text{ x } \ [-3, 3]$$

(a) *Em cada nó desta malha desenhe um vetor tangente de módulo*

$$\frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{2}$$

(b) *Coloque no arquivo* `''dados''` *os pares de pontos que determinam os vetores tangentes obtidos e visualize o resultado com* `gnuplot` *usando o comando*

```
plot ''dados'' with lines
```

separando cada par de pontos com uma linha em branco (caso contrário `gnuplot` *vai ligar todos os pontos).*

(c) *Faça um programa que que crie o arquivo* `''dados''` *e que chame o* `gnuplot` *para visualizar o* campo vetorial, *não se esqueça de fazer o programa separar os pontos com linha em branco.*

(d) *O resultado desta experiência produz uma visualização do fluxo de*

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + xy + y^2$$

na região considerada. Esta visualização pode ficar anulada tanto por uma precisão exagerada ou pobre, (uso de $\Delta x, \Delta y$ muito pequenos ou muito grandes. Estude isto fazendo o gráfico com diferentes normas para a malha.

2. *Refaça a questão anterior com*

$$f(x,y) = \frac{y+3}{x-3} \tag{2}$$

na região $[-10, 10]$. Discuta o resultado.

exemplo de aplicação em vez de termos a expressão algébrica $f(x,y)$ na equação (1) podemos ter um arquivo semelhante ao `''dados''` *obtido por sensores. O campo vetorial resutante descreve aproximadamente o fluxo de um* fenômeno *no retângulo observado. É o caso do fluxo de um rio, para determinarmos a melhor localização de uma ponte, dos pilares da ponte, embasamento etc... ou fluxo aéolico para distribuição de* cata-ventos *em uma região.*

3. *Uma equação diferencial da forma*

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{3}$$

se diz exata *se houver uma função*

$$z = F(x,y) \tag{4}$$

$$\tfrac{\partial F}{\partial x} = P \ ; \ \tfrac{\partial F}{\partial y} = Q \tag{5}$$

e isto pode ser testado com a igualdade (do meio na expressão):

$$\frac{\partial F^2}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial F^2}{\partial x \partial y} \tag{6}$$

As soluções de uma equação diferencial exata são as curvas de nível

$$F(x, y) = c \tag{7}$$

para constantes c *admissíveis. Uma solução aproximada pode ser uma poligonal cujos lados são sucessivamente obtidos com a equação da reta tangente que pode ser deduzida da equação a partir de uma condição inicial* $F(a, b) = c$

Considere a equação diferencial exata

$$2xy^2dx + 2x^2ydy = 0 \tag{8}$$

e a condição inicial $(a, b) = (-1, 1)$

(a) *Construa uma poligonal com cinco lados, considerando inicialmente a reta que passa no ponto* (a, b) *usando a equação diferencial para definir o lado inicial e, em cada lado escolhendo um ponto "proximo" como nova* condição inicial *onde traçar novo segmento de reta tangente.*

(b) *Coloque os dados no arquivo* `''dados''` *e usando o comando*

```
plot ''dados'' with lines
```

obtenha a poligonal-solução. Observe, não separe os pontos com linhas em branco para que `gnuplot` *trace uma única poligonal.*

(c) *Faça um programa que produza uma poligonal com lados medindo* δ *de sua escolha (coloque os dados no arquivo* `''dados''` *e use* `gnuplot` *para traçar a poligonal.*

4. *Resolva aproximadamente (gráfico) a equação diferencial exata*

$$xdx + ydy = 0 \ ; \ (a, b) = (0, 2) \tag{9}$$

<u>*solução exata*</u> *é um círculo.*

<u>*exemplos de aplicação*</u> *você pode colocar um satélite em órbita com este método e com uma equação parecida com a equação (9). Este método também serve para construir* pilotos automáticos *para controlar navegação. Pode também ser usado para determinar o melhor leito para uma estrada numa região acidentada. São todos exemplos de curvas de nível.*

<u>*Questão obrigatória*</u> *Faça uma análise crítica dos objetivos e do método deste tutorial. Você não receberá nota por sua opinião mas é obrigado a emití-la, em outras palavras, você não corre riscos de perder pontos se manifestando negativamente sobre a disciplina ou sobre os métodos usados pelo professor.*

Observe também que a sua análise força-l@-á a refletir sobre os métodos e portanto aprofundar a sua compreensão dos mesmos.