Cálculo Numérico Computacional	**Sol. da 7a. Lista**
aproximação polinomial - integral aproximada	
T. Praciano-Pereira	**Dep. de Matemática**
Univ. Estadual Vale do Acaraú	23 de abril de 2007

Exercícios 1 *Integral aproximada*

objetivo: Nesta lista você vai calcular aproximadamente, usando polinômios por pedaços do terceiro grau (quase-splines) a integral de uma função cujo valor exato nós podemos encontrar, desta forma você terá uma avaliação do modelo que estamos propondo os *quase-splines*. Nesta lista você também vai aprender um método de *validação estatística* do cálculo aproximado que poderá ser aplicado na validação de um modelo qualquer.

A última questão da lista não receberá nenhuma pontuação mas se não for feita a lista será recusada. Ela é obrigatória.

1. *Quantidade de um fenômeno*

   Considere a seguinte tabela de dados (obtidos por um sensor)

x_k	y_k	d_k
-7	-10	-70.650
0	0	-0.533
7	6	75

em que x_k são os nós da malha e y_k, d_k são, respectivamente o valor medido e a taxa de variação calculada em cada nó.

Solução 1 *(a) Encontre um um polinômio por pedaços do terceiro grau, P, que represesente o fenômeno no intervalo $[-7, 7]$ e faça o gráfico.*

Os coeficientes dos polinômios por intervalo são

```
 no intervalo [-7.00 , 0.00]
(a0,a1,a2,a3) = (-10.000000 , -70.650002, 20.874102, -1.511023)
no intervalo [0.00 , 7.00]
(a0,a1,a2,a3) = (0.000000 , -0.533000, -10.194654, 1.484749)
```

Os coeficientes foram calculados com o programa `ex0732.c`. *O mesmo programa cria uma tabela de dados e chama* `gnuplot` *para fazer o gráfico. O resultado pode ser visto na figura (1) página 2,*

(b) Calcule a integral aproximada do fenômeno assim modelado no intervalo $[-7, 7]$

$$(a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}) = (-10.00, -70.65, 20.874, -1.511) \quad (1)$$

$$\int_{-7}^{0} P_1(x)dx = \int_{0}^{7} P_1(x-7)d(x-7) = \quad (2)$$

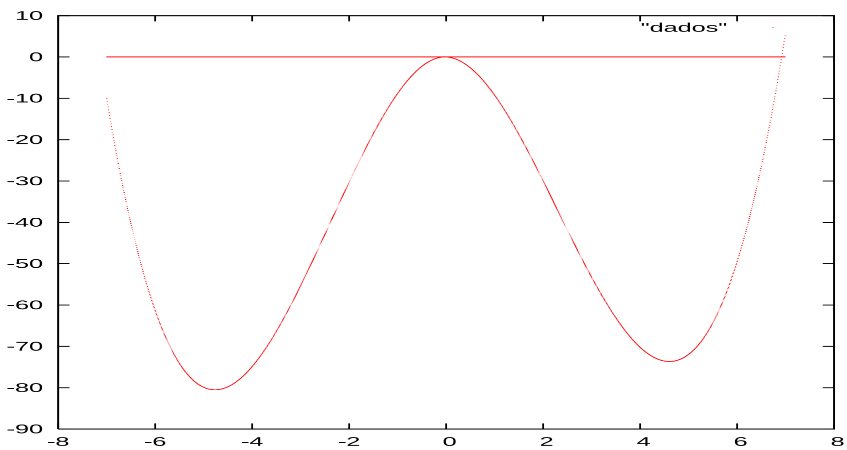

Figura 1: Polinômio por pedaços

$$= \int_0^7 P_1 = a_{10}x + a_{11}\frac{x^2}{2} + a_{12}\frac{x^3}{3} + a_{13}\frac{x^4}{4}|_0^7 = \quad (3)$$

$$= 7a_{10} + a_{11}\frac{7^2}{2} + a_{12}\frac{7^3}{3} + a_{13}\frac{7^4}{4} = \quad (4)$$

$$\approx -321.30875 \quad (5)$$

$$(a_{20}, a_{21}, a_{22}, a_{23}) = (0.00, -0.533, -10.194, 1.484) \quad (6)$$

$$\int_0^7 P_2(x)dx = \quad (7)$$

$$= 7a_{20} + a_{21}\frac{7^2}{2} + a_{22}\frac{7^3}{3} + a_{23}\frac{7^4}{4} = \quad (8)$$

$$\approx -287.42668675 \quad (9)$$

$$\int_{-7}^7 f(x)dx \approx -608.73543675 \quad (10)$$

O valor desta integral calculado com o programa `aproximacao.c` *é* -608.73761.

Observe que no cálculo das integrais dos polinômios-pedaços *sempre calculamos a integral no intervalo* $[0, 7]$. *Em geral as integrais, depois da* mudança de variável *serão calculadas no intervalo* $[0, \Delta]$ *em que* Δ *é a norma da malha quando esta for uniforme. Se a malha não for uniforme então o valor de* Δ *será uma variável.*

Aqui $\Delta = 7$.

(c) *Calcule o valor médio do fenômeno*

i. *usando apenas os dados colhidos;*

$$(-10 + 0 + 6)/3.0 \approx -1.33333333333333333333 \quad (11)$$

ii. usando a integral calculada.

$$Val_m ed(f)_{[a,b]} = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx \approx \tag{12}$$

$$\approx \frac{1}{14}\int\limits_{-7}^{7} f(x)dx = \frac{-608.73543675}{14} = \tag{13}$$

$$= -43.481102625 \tag{14}$$

(d) <u>*validação do modelo*</u> *Emita um laudo sobre a validade dos dados, baseado no cálculo dos dois tipos de valor médio, justificadamente.*

Considerando a discrepância entre o valor médio dos dados colidos, veja equação (11) e o valor médio integral, ver equação (14), o modelo obtido não é confiável e a sugestão para este problema consiste em obter mais dados e calcular novamente o modelo.

O conceito de discrepância *é relativo à precisão desejada, neste caso é evidente que o modelo não atende às expectativas para qualquer que seja a precisão desejada uma vez que entendemos precisão como valores que se situem no intervalo* $[0, 1]$.

2. <u>*Integral aproximada*</u>

Solução 2 (a) *Calcule, usando aproximação poliômial por pedaços, a integral*

$$\int\limits_{-1}^{1} 1 + x^2 dx \tag{15}$$

Calcule também, (1) o valor exato da integral e (2) a diferença entre o valor aproximado e o exato.

Sugestão: use a malha $\{-1, 0, 1\}$

Coeficientes calculados por intervalo:

```
no intervalo [-1.00 , 0.00]
(a0,a1,a2,a3) = (2.000000 , -2.000000, 1.000000, 0.000000)
no intervalo [0.00 , 1.00]
(a0,a1,a2,a3) = (1.000000 , 0.000000, 1.000000, 0.000000)
```

Os coeficientes foram calculados com o programa `ex0732.c`.

O valor exato da integral é $2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$.

O valor aproximado, calculado com o programa `aproximacao.c` *é* 2.66667.

(b) *Calcule o* valor médio integral *de* $f(x) = 1 + x^2$ *no intervalo* $[-1, 1]$ *e o valor* médio integral *da aproximação poliômial.*

O valor médio integral é

$$ValMed(f)_{[a,b]} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}\frac{8}{3} = \frac{4}{3} \tag{16}$$

(c) *validação do modelo* *Emita um laudo sobre a validade dos dados, baseado no cálculo dos dois tipos de valor médio, justificadamente.*

O valor médio usando a aproximação polinomial com o programa `ex0732.c` *é* 2.66667 *com erro inferior* 0.00001 *e portanto se esta for a precisão desejada o modelo merece confiança relativamente à precisão desejada.*

3. *Validação estatística*

Solução 3 (a) *Integral aproximada*

Calcule, usando aproximação poliômial por pedaços, a integral

$$I_0 = \int_{-3}^{3} x^2 sen(x)dx \tag{17}$$

usando malha com `norma` $\delta = 0.5$.

Com uma linguagem de programação, (vou usar `calc`*), vou obter a malha de dados no formato*

x_k	y_k	d_k

descrevendo o valor no ponto x_k *e a taxa de variação em cada um dos pontos da malha. Com estes dados vou determinar a aproximação polinomial.*

Os comandos em `calc` *são*

```
define f(x) {return power(x,2)*sin(x);}
define df(x) {return 2*x*sin(x)+ power(x,2)*cos(x);}
x=-3
delta = 0.5
while (x <=3){
  printf(''%f %f \n'', x, f(x), df(x));
x = x + delta;
}
```

Que resulta em

```
-3  -1.27008007253880499899  -8.06321242104480578283
-2.5   -3.74045090064972808781 -2.01478687664855324744
-2  -3.6371897073027267816  1.9726023611141572336
```

```
-1.5   -2.24436371985912246962  3.15164366356449484052
-1  -0.84147098480789650665 2.2232442754839327307
-0.5   -0.11985638465105075007 0.6988211790767961793
0  0  0
0.5   0.11985638465105075007 0.6988211790767961793
1 0.84147098480789650665 2.2232442754839327307
1.5   2.24436371985912246962  3.15164366356449484052
2  3.6371897073027267816  1.9726023611141572336
2.5   3.74045090064972808781  -2.01478687664855324744
3  1.2700800725388049989 -8.06321242104480578283
```

Com estes dados em um arquivo, (eu uso sempre o arquivo `leitura`*), vou obter os coeficientes dos pedaços de polinômios usando o programa* `ex0732.c`*:*

Os coeficientes calculados por intervalo são:

```
 no intervalo [ -3.00 , -2.50 ]
a0,a1,a2,a3 -  -1.270080  -8.063212 6.637976 -0.786068
no intervalo [ -2.50 , -2.00 ]
a0,a1,a2,a3 -  -3.740451  -2.014787 5.353078 -1.820918
no intervalo [ -2.00 , -1.50 ]
a0,a1,a2,a3 -  -3.637190  1.972602 2.520213 -1.788229
no intervalo [ -1.50 , -1.00 ]
a0,a1,a2,a3 -  -2.244364  3.151644 -0.218349 -0.946733
no intervalo [ -1.00 , -0.50 ]
a0,a1,a2,a3 -  -0.841471  2.223244 -1.631244 0.142428
no intervalo [ -0.50 , 0.00 ]
a0,a1,a2,a3 -  -0.119856  0.698821 -1.357008 0.877583
no intervalo [ 0.00 , 0.50 ]
a0,a1,a2,a3 -  0.000000  0.000000 0.040634 0.877583
 no intervalo [ 0.50 , 1.00 ]
 a0,a1,a2,a3 -  0.119856  0.698821 1.417602 0.142428
 no intervalo [ 1.00 , 1.50 ]
 a0,a1,a2,a3 -  0.841471  2.223244 1.638450 -0.946733
no intervalo [ 1.50 , 2.00 ]
a0,a1,a2,a3 -  2.244364  3.151644 0.162132 -1.788233
no intervalo [ 2.00 , 2.50 ]
a0,a1,a2,a3 -  3.637190  1.972602 -2.621699 -1.820921
no intervalo [ 2.50 , 3.00 ]
a0,a1,a2,a3 -  3.740451  -2.014787 -5.458877 -0.786065
```

O valor da integral usando a aproximação polinomial é 0.00000 *que coincide com a integral exata até* 5^{a} *casa decimal.*

(b) *Refinamento da malha*

Refaça o cálculo da integral com `norma` $\delta = 0.25$*, chame-o de* I_1 *e depois com* `norma` $\delta = 0.1$*, chame-o de* I_2 *e calcule as diferenças*

$$|I_0 - I_1|, |I_1 - I_2| \tag{18}$$

Faça uma análise desta seqüência de diferenças e decida se é importante fazer um novo refinamento da malha *justificando a sua conclusão.*

Neste caso esta análise estatística fica prejudicada uma vez que dificilmente obteriamos dados interessantes. Sem dúvida a questão foi mal posta pelo professor que usou uma função muito bem comportada (com pequenas oscilações) de modo que o modelo polinomial vai obter o valor da integral com grande aproximação mesmo usando malhas com norma muito grande. Consequentemente as diferenças

$$|I_0 - I_1|, |I_1 - I_2| \tag{19}$$

todas são nulas não servido aos objetivos da questão de mostrar que com o refinamento da malha podemos verificar se o modelo é confiável.

O objetivo da questão era o de mostrar que a cada refinamento as diferenças acima se tornariam menores indicando uma dispersão sucessivamente menor entre os valores obtidos com o modelo o que validaria o modelo.

Compensação do aluno

(a) Esta questão será corrigida dando-se dois pontos a quem tiver tentado fazê-la de forma documentada.

(b) Valerá um ponto extra para quem tiver observado que ela não tem sentido, valorizando o aluno que consegue encontrar os defeitos do ensino, sendo crítico desde que o comentário tenha algum embasamento.

(c) Os pontos podem ser aproveitados para outra nota no caso de o teto, 10, ser atingido.

A função de que é objeto a próxima questão se presta bem aos objetivos desta e será feita, com ela, a análise estatística que aqui ficou prejudicada. O professor se desculpa, com os alunos, pelo defeito da questão.

4. *Considere $f(x) = (x+1)(x-1)(x+4)sin(x)$ definida no intervalo [-7,7].*

Solução 4 *(a) Conhecendo os valores de f e de sua derivada nos pontos $-7, \pm\sqrt{\pi}, 7$, encontre um polinômio por pedaços do terceiro grau (três pedaços) que represente aproximadamente f.*

Usando `calc` *consegui a seguinte tabela de dados*

x_k	x_k	x_k
-7	*94.6060702155056290176*	*-167.69071851012688602816*
-1.7724538509055160273	*-4.67382680587278042497*	*4.68273648922305878431*
1.7724538509055160273	*12.11173539771246920156*	*19.67027372312282727569*
7	*346.8889241235206397312*	*530.77168323446024519872*

Com o programa `aproximacao.c` *calculei os coeficientes dos polinômios* P_1, P_2, P_3 *nos intervalos indicados abaixo:*

$[-7.00, -\sqrt{\pi}]$	$(a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}) \approx$	$(94.6, -167.69, 52.36, -4.575)$
$[-\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}]$	$(a_{20}, a_{21}, a_{22}, a_{23}) \approx$	$(-4.67, 4.68, -4.18, 1.184)$
$[\sqrt{\pi}, 7]$	$(a_{30}, a_{31}, a_{32}, a_{33}) \approx$	$(12.11, 19.67, -72.30, 15.45)$

(b) Calcule o valor aproximado de f *nos pontos*

$$\{-3, -0.51, 0, 2, 4, 5\}$$

usando esta aproximação e indique o erro cometido (compare com o valor exato).

Usando `calc` *defini*

```
 a = sqrt(4*atan(1))
 1.7724538509055160273
define P1(x) {return
 94.606071 - 167.690720*(x+7)+ 52.361778*power(x+7,2) -4.575090*power(x+7,3);
}

define P2(x) {return
-4.673827 + 4.682736*(x+pi) - 4.183575*power(x+a,2) + 1.184333*power(x+a,3)
}

define P3(x) {return
 12.111735 + 19.670273*(x-pi) - 72.307190*power(x-a,2)+15.455638*power(x-a,3)
}
```

Na tabela abaixo, P *representa a aproximação polinomial.*

$P(x)$ =	$P(x)$	$f(x)$
$P_1(-3) =$	*-31.174121*	*-1.12896006447*
$P_2(-0.51) =$	*-3.0468479345*	*1.2605961839*
$P_2(0) =$	*-2.922227428296*	*0*
$P_3(2) =$	*13.0258563*	*16.36735368*
$P_3(4) =$	*-132.026190722*	*-90.81629943*
$P_3(5) =$	*-157.98737606*	*-207.1276433*

(c) Faça os gráficos de f *e da aproximação polinomial por pedaços obtida e faça um laudo técnico do resultado.*

*Os valores pontuais verificados no modelo tem uma divergência muito grande da "*realidade*" e consequentemente o modelo não é confiável. Isto aponta para uma necessidade de um outro levantamento de dados com* malha mais fina *(acréscimo de sensores).*

O gráfico confirma isto, embora em levantamentos de dados amostrais um gráfico não possa ser feito para produzir esta comparação. Apenas valores amostrais podem ser comparados com os dados do modelo. Veja a figura (2) página 8,

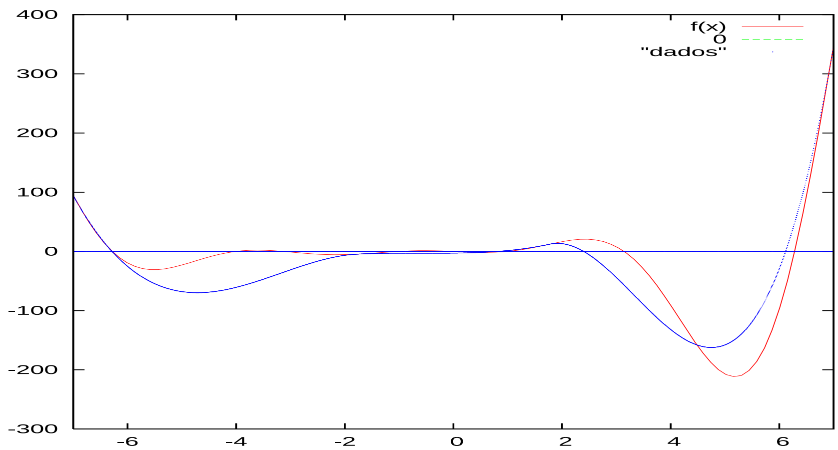

Figura 2: função e aproximação quase-splines

(d) Use esta aproximação para calcular o valor de

$$\int_{-7}^{7} f(x)dx$$

Observe que não seria fácil calcular esta integral exatamente, tente, (indique um método para o cálculo exato da integral).

(e) Calcule o valor médio no intervalo $[-7,7]$ *(1) da aproximação polinomial, (2) da função* $f(x) = (x+1)(x-1)(x+4)sin(x)$

Um método para calcular exatamete esta integral é integração por partes *com três iteradas do método.*

passo	*integral(passo)*	$\vert I_{i+1} - I_i\vert$
1	$I_0 = -258.08502$	$-$
0.5	$I_1 = -259.72720$	1.64218
0.25	$I_2 = -259.33350$	0.3937
0.1	$I_3 = -259.3382$	0.0047

A terceira coluna da tabela acima traz as diferenças entre os valores sucessivamente obtidos pela integral aproximada a cada novo refinamento da malha. O resultado indica que o novo valor obtido está mais próximo do anterior à medida que a malha é refinada.

*O que indica, com grande probabilidade, pelo menos no que diz respeito a uma tipo de medida deste fenômeno, que o modelo polinômial representa a "*realidade*" com fieldade.*

Se estas diferenças se mantivessem constantes ou seus valores se encontrassem dispersos *isto seria um indicativo de que o modelo não estaria sendo melhorado com o refinamento.*

Em suma, como o modelo polinomial merece confiança, ao refinarmos a malha (aumentarmos o número de sensores) conseguimos um modelo mais confiável (e mais caro).

Os passos usados, como `calc` *para obter estes dados foram*

```
define f(x) {return (x+1)*(x-1)*(x+4)*sin(x);}

define df(x) {return (x-1)*(x+4)*sin(x) + (x+1)*(x+4)*sin(x) +\
(x+1)*(x-1)*sin(x) +(x+1)*(x-1)*(x+4)*cos(x);}

fopen(''leitura'', ''w'');

fclose(leitura)

define cria_dados(inicio, fim, delta){
fopen(''leitura'', ''w'');
while(inicio <= fim){
printf( ''%f   %f   %f \n'', inicio, f(inicio), df(inicio));
  inicio = inicio + delta;
 }
fclose(leitura)
 }
```

Depois executei `cria_dados()` *com os seguintes valores para* `passo`

$$\delta \in \{1, 0.5, 0.25, 0.1\} \tag{20}$$

5. *Interpolação dita de Lagrange Calcule o polinômio dito de Langrange que interpola os pontos*

$$\{(-7,4), (-3,-2), (1,0), (3,5), (9,5)\}$$

e faça o gráfico.

Solução 5 *É a mesma que foi feita na outra lista apenas com a alteração dos dados. Você pode usar o mesmo programa descrito na lista anterior.*

6. *Discussão sobre o método* *Redija a sua forma de ver a seguinte situação:* calculamos as integrais aproximadas de funções cujas integrais exatas sabiamos calcular. Isto parece ser um absurdo. *Justifique cuidadosamente a sua opinião, em particular use exemplos desta lista para apoiar o seu ponto de vista.*

   Esta questão é obrigatória, sem ela *a sua lista de exercícios ficará* **anulada***, entretanto a sua opinião não será avaliada, isto é, você não corre o risco de perder pontos ao emitir uma opinião.*

   A sua forma de ver *o conteúdo desta lista será usada pelo professor para corrigir eventuais erros na condução e planejamento da disciplina.*