

Por favor, prenda esta folha de rosto na sua solução desta lista. Ela será usada para a correção.

Não se esqueça do método de correção, somente considero uma questão **certa** se (1) os resultados estiverem **absolutamente** corretos e **se** (2) todos os cálculos (mesmo feitos por um programa) estiverem todos **justificados** (dentro de um programa isto pode ser feito com comentários).

Exercícios 1 *Aproximação Polinomial*

1. derivada algoritmica Considere

$$P(x) = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) = \prod_{k=1}^3 (x - a_k) \quad (1)$$

Verifique que

$$P'(x) = (x - a_1)(x - a_2) + (x - a_1)(x - a_3) + (x - a_2)(x - a_3) = \sum_{k=1}^3 P_k(x) \quad (2)$$

e indique qual regra de derivação foi usada. Escreva as equações dos polinômios P_k observando uma relação entre eles e o polinômio P .

2. Tutorial sobre Polinômio de Lagrange

(a) derivada algoritmica Considere

$$P(x) = \prod_{k=1}^n (x - a_k) \quad (3)$$

um polinômio do grau n . Defina $P_k(x) = \frac{P(x)}{x - a_k}$

- Verifique que $P'(x) = \sum_{k=1}^n P_k(x)$
- Verifique que $P_k(x) = \frac{P(x)}{(x - a_k)}$ é um polinômio de grau $n - 1$, para cada k .
- Calcule $P_k(a_k), P_k(a_j)$ com $j \neq k$.

(b) Prove que se P for um polinômio definido pela equação (eq. 3) e as raízes a_k todas distintas, então $P'(a_k) \neq 0$ para todo $k = 1 \dots n$

(c) Considere a malha $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ no intervalo $[a, b]$.

Defina P como na (eq. 3) e $f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{P_k(x)}{P'(a_k)}$. Suponha inicialmente que $n = 3$ e calcule

$$f(a_1), f(a_2), f(a_3) \quad (4)$$

(d) Generalize, para n qualquer a questão anterior, calculando

$$f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n) \quad (5)$$

Verifique que f é um polinômio de grau $n - 1$ e escreva a equação de f .

(e) Polinômio interpolando pontos no plano

i. Considere a sequência de nós

$$\{-3, -2.5, -1.5, -0.5, 0.5, 1.5, 2.5, 3\} \subset [-3, 3]$$

Calcule P definido pela (eq. 3) relativamente a esta malha. Calcule as derivadas de P em cada um dos pontos da malha.

ii. Considere os pontos do plano

$$\{(-3, 1), (-2.5, 0), (-1.5, 2), (-0.5, 3), (0.5, 3), (1.5, 1), (2.5, -2), (3, 4)\}$$

que são da forma (x_k, y_k) . Defina a função

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{y_k P_k(x)}{P'(a_k)} \quad (6)$$

- A. Calcule $f(x_k)$, para cada valor de k .
- B. Prove que f é um polinômio, de grau $n - 1$
- C. Prove que o gráfico de f passa nos pontos

$$\{(-3, 1), (-2.5, 0), (-1.5, 2), (-0.5, 3), (0.5, 3), (1.5, 1), (2.5, -2), (3, 4)\}$$

(f) Polinômio de Lagrange Considere a malha

$$a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$$

no intervalo $[a, b]$. Defina f como na (eq. 6) e $f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{b_k P_k(x)}{P'(a_k)}$.

Calcule

$$f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n) \quad (7)$$

Verifique que f é um polinômio de grau $n - 1$ que interpola os pontos

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n) \quad (8)$$

3. Encontre o polinômio de Lagrange interpolando os pontos

$$(-5, -3), (-3, 0), (0, -7), (1, -3), (3, 2), (7, 9), (10, -3) \quad (9)$$

e calcule a sua integral no intervalo $[-5, 10]$.