Cálculo Numérico Computacional	**6a. Lista**
aproximação polinomial - Polinômio de Lagrange	
T. Praciano-Pereira	**Dep. de Matemática**
aluno:	
Univ. Estadual Vale do Acaraú	26 de março de 2007

Por favor, prenda esta folha de rosto na sua solução desta lista. Ela será usada para a correção.

Não se esqueça do método de correção, somente considero uma questão **certa** se (1) os resultados estiverem **absolutamente** corretos e se (2) todos os cálculos (mesmo feitos por um programa) estiverem todos **justificados** (dentro de um programa isto pode ser feito com comentários).

Exercícios 1 *Aproximação Polinomial*

1. *derivada algoritmica Considere*

$$P(x) = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) = \Pi_{k=1}^{3}(x - a_k) \quad (1)$$

Verifique que

$$P'(x) = (x-a_1)(x-a_2)+(x-a_1)(x-a_3)+(x-a_2)(x-a_3) = \sum_{k=1}^{3} P_k(x) \quad (2)$$

e indique qual regra de derivação foi usada. Escreva as equações dos polinômios P_k observando uma relação entre eles e o polinômio P.

2. *Tutorial sobre Polinômio de Lagrange*

   (a) *derivada algoritmica Considere*

   $$P(x) = \Pi_{k=1}^{n}(x - a_k) \quad (3)$$

   um polinômio do grau n . Defina $P_k(x) = \frac{P(x)}{x-a_k}$

   - *Verifique que $P'(x) = \sum_{k=1}^{n} P_k(x)$*
   - *Verifique que $P_k(x) = \frac{P(x)}{(x-a_k)}$ é um polinômio de grau $n-1$, para cada k.*
   - *Calcule $P_k(a_k), P_k(a_j)$ com $j \neq k$.*

   (b) *Prove que se P for um polinômio definido pela equação (eq. 3) e as raizes a_k todas distintas, então $P'(a_k) \neq 0$ para todo $k = 1 \ldots n$*

   (c) *Considere a malha $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ no intervalo $[a, b]$. Defina P como na (eq. 3) e $f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{P_k(x)}{P'(a_k)}$. Suponha inicialmente que $n = 3$ e calcule*

   $$f(a_1), f(a_2), f(a_3) \quad (4)$$

(d) *Generalize, para n qualquer a questão anterior, calculando*

$$f(a_1), f(a_2), \cdots, f(a_n) \tag{5}$$

Verifique que f é um polinômio de grau $n-1$ e escreva a equação de f.

(e) *Polinômio interpolando pontos no plano*

i. *Considere a sequência de nós*

$$\{-3, -2.5, -1.5, -0.5, 0.5, 1.5, 2.5, 3\} \subset [-3, 3]$$

Calcule P definido pela (eq. 3) relativamente a esta malha. Calcule as derivadas de P em cada um dos pontos da malha.

ii. *Considere os pontos do plano*

$$\{(-3,1), (-2.5,0), (-1.5,2), (-0.5,3), (0.5,3), (1.5,1), (2.5,-2), (3,4)\}$$

que são da forma (x_k, y_k). Defina a função

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{y_k P_k(x)}{P'(a_k)} \tag{6}$$

A. *Calcule $f(x_k)$, para cada valor de k.*

B. *Prove que f é um polinômio, de grau $n-1$*

C. *Prove que o gráfico de f passa nos pontos*

$$\{(-3,1), (-2.5,0), (-1.5,2), (-0.5,3), (0.5,3), (1.5,1), (2.5,-2), (3,4)\}$$

(f) *Polinômio de Lagrange Considere a malha*

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$$

no intervalo $[a, b]$. Defina f como na (eq. 6) e $f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k P_k(x)}{P'(a_k)}$. Calcule

$$f(a_1), f(a_2), \cdots, f(a_n) \tag{7}$$

Verifique que f é um polinômio de grau $n-1$ que interpola os pontos

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \cdots, (a_n, b_n) \tag{8}$$

3. *Encontre o polinômio de Lagrange interpolando os pontos*

$$(-5,-3), (-3,0), (0,-7), (1,-3), (3,2), (7,9), (10,-3) \tag{9}$$

e calcule a sua integral no intervalo $[-5, 10]$.