

Cálculo Numérico Computacional  
aproximação polinomial - Polinômio de Lagrange  
T. Praciano-Pereira

6a. Lista

Dep. de Matemática

**aluno:**

---

---

Univ. Estadual Vale do Acaraú

15 de abril de 2007

---

---

Por favor, prenda esta *folha de rosto* na sua solução desta lista, deixando-a em branco. Ela será usada na correção.

## Exercícios 1 Aproximação Polinomial

### 1. derivada algorítmica Considere

$$P(x) = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) = \prod_{k=1}^3 (x - a_k) \quad (1)$$

Verifique que

$$P'(x) = (x - a_1)(x - a_2) + (x - a_1)(x - a_3) + (x - a_2)(x - a_3) = \sum_{k=1}^3 P_k(x) \quad (2)$$

e indique qual regra de derivação que foi usada. Escreva as equações dos polinômios  $P_k$  observando uma relação entre eles e o polinômio  $P$ .

**Solução 1** Como  $P$  é um produto de monômios, a sua derivada pode ser calculada pela regra da derivada do produto.

$$P(x) = uvw$$

é um produto de três fatores, e neste caso a regra do produto para derivadas fica

$$(uvw)' = (u(vw))' = u'(vw) + u(vw)' \quad (3)$$

$$(uvw)' = u'(vw) + u(v'w + vw') = u'vw + uv'w + uvw' \quad (4)$$

$$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw' \quad (5)$$

Na equação (3) usamos a propriedade associativa que permite escrever um produto de três termos como o produto de dois termos, ao qual aplicamos a regra do produto habitual. Na equação (4) aplicamos a propriedade distributiva do produto em relação à soma para obter a expressão da regra do produto de derivação de três fatores expressa na equação (5).

A derivada de  $P$  é uma soma de três parcelas, em cada uma delas tendo sido substituído um dos fatores, sucessivamente, por sua derivada.

$$P'(x) = (x - a_1)'(x - a_2)(x - a_3) + (x - a_1)(x - a_2)'(x - a_3) + \quad (6)$$

$$+ (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)' = \quad (7)$$

$$= (x - a_2)(x - a_3) + (x - a_1)(x - a_3) + (x - a_1)(x - a_2) = \quad (8)$$

$$P_1(x) + P_2(x) + P_3(x) \quad (9)$$

uma soma de produtos de dois termos (falso: são três termos, mas um dos termos é a unidade, a derivada de  $(x - a_k)$ ).

Claro, este é um caso particular. Se os fatores fossem da forma

$$a_k x - b_k$$

apareceria, em lugar de cada fator, o coeficiente  $a_k$  que é a sua derivada. Neste caso  $a_k = 1$ .

Aparentemente dividimos  $P$  por cada um dos fatores para obter os termos com apenas dois fatores, o que nos permite escrever

$$P_k(x) = \frac{P(x)}{x - a_k}$$

e finalmente que

$$P'(x) = P_1(x) + P_2(x) + P_3(x) = \quad (10)$$

$$P'(x) = \frac{P(x)}{x-a_1} + \frac{P(x)}{x-a_2} + \frac{P(x)}{x-a_3} \quad (11)$$

## 2. Tutorial sobre Polinômio de Lagrange

(a) derivada algoritmica Considere

$$P(x) = \prod_{k=1}^n (x - a_k) \quad (12)$$

um polinômio do grau  $n$ . Defina

$$P_k(x) = \frac{P(x)}{x - a_k} \quad (13)$$

- Verifique que  $P'(x) = \sum_{k=1}^n P_k(x)$
- Mostre que  $P_k(x) = \frac{P(x)}{(x-a_k)}$  é um polinômio de grau  $n - 1$ , para cada  $k$ .
- Calcule  $P_k(a_k)$  e  $P_k(a_j)$  com  $j \neq k$ .

(b) Prove que se  $P$  for um polinômio definido pela equação (eq. 12) e as raízes  $a_k$  todas distintas, então  $P'(a_k) \neq 0$  para todo  $k = 1 \dots n$

(c) Considere a malha  $a = a_1 < a_2 < \dots < a_n = b$  no intervalo  $[a, b]$ .

Defina  $P$  como na (eq. 12) e  $f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{P_k(x)}{P'(a_k)}$ . Suponha inicialmente que  $n = 3$  e calcule

$$f(a_1), f(a_2), f(a_3) \quad (14)$$

(d) Generalize, para  $n$  qualquer, a questão anterior, calculando

$$f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n) \quad (15)$$

Verifique que  $f$  é um polinômio de grau  $n - 1$  e escreva a equação de  $f$ .

(e) Polinômio interpolando pontos no plano

i. Considere a sequência de nós

$$\{-3, -2.5, -1.5, -0.5, 0.5, 1.5, 2.5, 3\} \subset [-3, 3]$$

Calcule  $P$  definido pela (eq. 12) relativamente a esta malha.

Calcule as derivadas de  $P$  em cada um dos pontos da malha.

ii. Polinômio de Lagrange Considere os pontos do plano

$$\{(-3, 1), (-2.5, 0), (-1.5, 2), (-0.5, 3), (0.5, 3), (1.5, 1), (2.5, -2), (3, 4)\}$$

que são da forma  $(x_k, y_k)$ . Defina a função

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{y_k P_k(x)}{P'(x_k)} \quad (16)$$

A. Calcule  $f(x_k)$ , para cada valor de  $k$ .

B. Prove que  $f$  é um polinômio, de grau  $n - 1$

C. Mostre que o gráfico de  $f$  passa nos pontos

$$\{(-3, 1), (-2.5, 0), (-1.5, 2), (-0.5, 3), (0.5, 3), (1.5, 1), (2.5, -2), (3, 4)\}$$

(f) Polinômio de Lagrange - caso genérico Considere a malha

$$a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$$

no intervalo  $[a, b]$  e um conjunto de pontos no plano associados a esta malha;

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n) \quad (17)$$

Defina  $f$  como na (eq. 16)  $f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{b_k P_k(x)}{P'(a_k)}$ . Calcule

$$f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n) \quad (18)$$

Verifique que  $f$  é um polinômio de grau  $n - 1$  que interpola os pontos

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n) \quad (19)$$

**Solução 2** (a) Como  $P$  é um polinômio do grau  $n$  fatorado num produto de  $n$  fatores do primeiro grau, então, pela regra do produto<sup>1</sup> de derivação,  $P'$  será uma soma de  $\underline{n}$  parcelas o que pode ser expresso como

$$P'(x) = \sum_{k=1}^n P_k(x) \quad (20)$$

em que  $P_k$  representa uma parcela arbitrária nesta soma de  $\underline{n}$  parcelas.

---

<sup>1</sup> $(u_1 u_2 \dots u_n)' = (u_1' u_2 \dots u_n) + \dots + (u_1 u_2 \dots u_n')$ ,  $n$  parcelas

(b) Pela regra do produto de derivação, as parcelas na soma

$$P'(x) = \sum_{k=1}^n P_k(x)$$

são obtidas pela substituição sucessiva de cada um dos termos no produto, pela sua derivada.

Como todos os fatores são da forma

$$(x - a_k) ; \frac{d}{dx}(x - a_k) = 1 \quad (21)$$

então cada uma das parcelas na soma  $P'$  aparenta ser  $P$  dividido por  $x - a_k$ , portanto  $P_k(x) = \frac{P(x)}{x - a_k}$ .

(c)  $P_k(x)$  é o produto de todos os outros fatores em  $P(x)$  exceto  $(x - a_k)$

$$P_1(x) = 1 \cdot (x - a_2) \cdots (x - a_n) \quad (22)$$

$$P_1(a_1) = 1 \cdot (a_1 - a_2) \cdots (a_1 - a_n) \neq 0 \quad (23)$$

$$P_2(x) = (x - a_1) \cdot 1 \cdot (x - a_3) \cdots (x - a_n) \quad (24)$$

$$P_2(a_2) = (a_2 - a_1) \cdot 1 \cdot (a_2 - a_3) \cdots (a_2 - a_n) \neq 0 \quad (25)$$

$$\vdots \quad (26)$$

$$P_{n-1}(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_{n-2})(x - a_n) \quad (27)$$

$$P_{n-1}(a_{n-1}) = \quad (28)$$

$$= (a_{n-1} - a_1)(a_{n-1} - a_2) \cdots (a_{n-1} - a_{n-2})(a_{n-1} - a_n) \quad (29)$$

$$P_{n-1}(a_{n-1}) \neq 0 \quad (30)$$

$$P_n(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_{n-2})(x - a_{n-1}) \quad (31)$$

$$P_n(a_n) = (a_n - a_1)(a_n - a_2) \cdots (a_n - a_{n-2})(a_n - a_{n-1}) \cdot 1 \quad (32)$$

$$P_n(a_n) \neq 0 \quad (33)$$

Na equação (23) todas as diferenças estão calculadas com termos diferentes, portanto diferentes de zero, pela hipótese de que todas as raízes em  $P$  são diferentes.

Sendo  $P_1(a_1)$  um produto de números diferentes de zero não pode ser igual a zero, porque se fosse, algum dos fatores teria que se anular.

Da mesma forma, na expressão de  $P_2(a_2)$  todas as diferenças estão calculadas com termos diferentes, portanto diferentes de zero, sempre pela hipótese de que as raízes em  $P$  são diferentes. Sendo  $P_2(a_2)$  um produto de números diferentes de zero não pode ser igual a zero, porque se fosse, algum dos fatores teria que se anular.

Assim sucessivamente, em  $P_{n-1}(a_{n-1})$  todas as diferenças no produto são diferentes de zero fazendo de  $P_{n-1}(a_{n-1})$  um número diferente de zero. O mesmo podendo se dizer de  $P_n(a_n) \neq 0$ .

(d) Como se trata de uma malha colocada em um intervalo não teria sentido a existência de dois nós idênticos. Por hipótese eles são apresentados em forma crescente

$$a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b \quad (34)$$

o que significa que são as distintas raízes de

$$P(x) = \prod_{k=1}^n (x - a_k) \quad (35)$$

Definindo

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{P_k(x)}{P'(a_k)} \quad (36)$$

temos

$$f(a_j) = \sum_{k=1}^n \frac{P_k(a_j)}{P'(a_k)} \quad (37)$$

mas já vimos que se  $k \neq j$  então  $P_k(a_j) = 0$  e assim todos os termos da soma, na da equação (37), são nulos exceto o termo  $P_j(a_j)$ , quando o índice da soma,  $k$ , coincidir com o índice de  $a_j$ , ficando a soma reduzida à parcela

$$f(a_k) = \frac{P_k(a_k)}{P'(a_j)} \quad (38)$$

Mas o denominador,  $P'$  é uma soma dos polinômios  $P_k$ , então temos, no denominador da equação (38) a soma

$$\sum_{k=1}^n P_k(a_j) \quad (39)$$

com todos os termos nulos, exceto um,  $P_j(a_j)$  que transforma a equação

$$f(a_k) = \frac{P_j(a_j)}{P_j(a_j)} = 1 \quad (40)$$

e portanto a função  $f$  definida pela equação (36) é constante sobre o  $n + 1$  nós da malha. Uma função polinomial de grau  $n - 1$  que seja constante sobre  $n$  pontos diferentes, é uma função constante<sup>2</sup>.

Um polinômio de grau  $n - 1$  coincidindo  $n$  vezes com a constante 1 é um polinômio constante. Então  $f$  é a função identicamente constante valendo 1.

$$f(x) = 1 \quad (41)$$

---

<sup>2</sup>uma função do primeiro grau que seja constante sobre dois pontos distintos, é constante

(e) Em Calc

```
define P(x) {return (x + 3)*(x + 2.5)*(x + 1.5)*(x + 0.5)*(x - 0.5)*\
(x - 1.5)*(x - 2.5)*(x - 3);}
define dP(x) {
  local y;
  y = (x + 2.5)*(x + 1.5)*(x + 0.5)*(x - 0.5)*(x - 1.5)*(x - 2.5)*(x - 3) + \
  y = y + (x + 3)*(x + 1.5)*(x + 0.5)*(x - 0.5)*(x - 1.5)*(x - 2.5)*(x - 3); + \
  y = y + (x + 3)*(x + 2.5)*(x + 0.5)*(x - 0.5)*(x - 1.5)*(x - 2.5)*(x - 3); + \
  y = y + (x + 3)*(x + 2.5)*(x + 1.5)*(x - 0.5)*(x - 1.5)*(x - 2.5)*(x - 3); + \
  y = y + (x + 3)*(x + 2.5)*(x + 1.5)*(x + 0.5)*(x - 1.5)*(x - 2.5)*(x - 3); + \
  y = y + (x + 3)*(x + 2.5)*(x + 1.5)*(x + 0.5)*(x - 0.5)*(x - 2.5)*(x - 3); + \
  y = y + (x + 3)*(x + 2.5)*(x + 1.5)*(x + 0.5)*(x - 0.5)*(x - 1.5)*(x - 3); + \
  y = y + (x + 3)*(x + 2.5)*(x + 1.5)*(x + 0.5)*(x - 0.5)*(x - 1.5)*(x - 2.5); + \
  return y;
}
```

A contra-barras serve para eliminar o sinal de fim de linha, quer dizer que como está acima, tem uma única linha definindo  $dP(x)$  para, Calc.

$$P(x) = (x + 3) * (x + 2.5) * (x + 1.5) * (x + 0.5) * (x - 0.5) * (x - 1.5) * (x - 2.5) * (x - 3) \quad (42)$$

$$P'(x) = \quad (43)$$

$$= (x + 2.5) * (x + 1.5) * (x + 0.5) * (x - 0.5) * (x - 1.5) * (x - 2.5) * (x - 3) + \quad (44)$$

$$+ (x + 3) * (x + 1.5) * (x + 0.5) * (x - 0.5) * (x - 1.5) * (x - 2.5) * (x - 3) + \quad (45)$$

$$+ (x + 3) * (x + 2.5) * (x + 0.5) * (x - 0.5) * (x - 1.5) * (x - 2.5) * (x - 3) + \quad (46)$$

$$+ (x + 3) * (x + 2.5) * (x + 1.5) * (x - 0.5) * (x - 1.5) * (x - 2.5) * (x - 3) + \quad (47)$$

$$+ (x + 3) * (x + 2.5) * (x + 1.5) * (x + 0.5) * (x - 1.5) * (x - 2.5) * (x - 3) + \quad (48)$$

$$+ (x + 3) * (x + 2.5) * (x + 1.5) * (x + 0.5) * (x - 0.5) * (x - 2.5) * (x - 3) + \quad (49)$$

$$+ (x + 3) * (x + 2.5) * (x + 1.5) * (x + 0.5) * (x - 0.5) * (x - 1.5) * (x - 3) + \quad (50)$$

$$+ (x + 3) * (x + 2.5) * (x + 1.5) * (x + 0.5) * (x - 0.5) * (x - 1.5) * (x - 2.5) \quad (51)$$

$$P'(-3) = -974.53125; P'(-2.5) = 330; P'(-1.5) = -162; \dots \quad (52)$$

$$(53)$$

As derivadas alternam de sinal porque o polinômio  $P$  corta o eixo  $OX$  sucessivamente em cada um dos zeros.

(f)

$$f(x) \quad (54)$$

3. Encontre o polinômio de Lagrange interpolando os pontos

$$(-5, -3), (-3, 0), (0, -7), (1, -3), (3, 2), (7, 9), (10, -3) \quad (55)$$

e calcule a sua integral no intervalo  $[-5, 10]$ .

**Solução 3** Vou apresentar, na parte final da solução um meio de calcular a integral formalmente, deixando-a apenas proposta, para depois ser calculada aproximadamente como aplicação do que será estudado no próximo capítulo.

Aplicando o método exposto no tutorial exercício (2), temos, usando Calc

```

a0=-5; a1 = -3;a2=0; a3 = 1;a4=3; a5 =7;a6 = 10;
y0=-3; y1 = 0;y2= -7; y3 = -3;y4=2; y5 =9;y6 = -3;
define P(x) {return (x-a0)*(x-a1)*(x-a2)*(x-a3)*(x-a4)*(x-a5)*(x-a6);}
define P0(x) {return (x-a1)*(x-a2)*(x-a3)*(x-a4)*(x-a5)*(x-a6);}
define P1(x) {return (x-a0)*(x-a2)*(x-a3)*(x-a4)*(x-a5)*(x-a6);}
define P2(x) {return (x-a0)*(x-a1)*(x-a3)*(x-a4)*(x-a5)*(x-a6);}
define P3(x) {return (x-a0)*(x-a1)*(x-a2)*(x-a4)*(x-a5)*(x-a6);}
define P4(x) {return (x-a0)*(x-a1)*(x-a2)*(x-a3)*(x-a5)*(x-a6);}
define P5(x) {return (x-a0)*(x-a1)*(x-a2)*(x-a3)*(x-a4)*(x-a6);}
define P6(x) {return (x-a0)*(x-a1)*(x-a2)*(x-a3)*(x-a4)*(x-a5);}
define dP(x) {return P0(x)+ P1(x)+P2(x)+ P3(x)+ P4(x)+ P5(x)+ P6(x);}
define f(x) {local y;
y = y0*P0(x)/dP(a0) + y1*P1(x)/dP(a1) + y2*P2(x)/dP(a2);
y = y + y3*P3(x)/dP(a3)+y4*P4(x)/dP(a4)+y5*P5(x)/dP(a5)+y6*P6(x)/dP(a6);
return y; }

define df(x) {local delta = 0.0000001; return (f(x+delta)-f(x))/delta;}

dados = fopen("dados", "w");
fclose(dados);

define cria_dados(inicio, fim) {
local delta = 0.1;
dados = fopen("dados", "w");
while(inicio <= fim){
fprintf(dados, "%f %f %f \n", inicio, f(inicio), df(inicio));
inicio = inicio + delta;
}
fclose(dados);
}

transfere = fopen("transfere", "w");
fclose(transfere);

define cria_comandos(){
transfere = fopen("transfere", "w");
fprintf(transfere, "set title \"meus graficos - polinomio de Lagrange\" \n");
fprintf(transfere, "set pointsize 0.1 \n");
fprintf(transfere, "set terminal jpeg \n");
fprintf(transfere, "set output \"grafico.jpg\" \n");
}

```

```
fprintf(transfere, "plot \"dados\" with lines, 0 with lines \n");
fprintf(transfere, "pause -2");
fclose(transfere);
}
```

*Executando estes comandos dentro de calc irá produzir o arquivo dados com uma tabela de pontos para gnuplot ou para meu programa aproximacao.c que me permitirá calcular também a integral aproximada do polinômio de Lagrange (feito ao final). Defini a derivada do polinômio de Lagrange aproximadamente para produzir a informação que necessito para construção de quase-splines. Você pode omitir este dado quando executar em calc, mas gnuplot irá ignorar a terceira coluna de dados. O arquivo transfere contém os comandos para que gnuplot faça o gráfico. Edite a linha que contém o comando terminal se desejar produzir outro tipo de gráfico, como se encontra acima irá produzir um gráfico do tipo jpeg que será colocado no arquivo grafico.jpg controlado pelo comando ouput na próxima linha.*

*Usando o help do gnuplot você pode selecionar outros tipos de terminais e definir outros tipos de figuras.*

*Antes de chamar gnuplot para produzir o gráfico, edite o arquivo dados porque calc coloca o sinal de aproximação antes de valores do tipo float, use o comando de busca e substituição do editor para eliminar este símbolo que irá confundir gnuplot. Se você não fizer isto o gráfico lhe parecerá sem sentido.*

*Foi usando este método que produzi o gráfico na figura (fig. 1) página 10, que mostra o Polinômio de Lagrange que interpola os pontos dados.*

*A figura (fig. 2) página 11, apresenta uma comparação entre o polinômio dito de Lagrange e um quase-splines usando a mesma malha (tanto para o polinômio de Lagrange como para o quase-splines). Os dados usando para representar a derivada do polinômio de Lagrange foram obtidos com a derivada aproximada definida acima, em calc.*

*Na figura (fig. 3) página 12, você pode ver outro gráfico comparativo, produzido por um programa em C em que incluí mais alguns pontos na malha usando a expressão do polinômio de Lagrange e calculando a derivada do mesmo polinômio com quocientes de diferenças.*

*O programa exer06.calc tem o código do Calc com o qual você pode repetir estas experiências. O programa ex0732.c constrói quase-splines com uma malha arbitrária que pode ser fornecida usando um arquivo em disco, nome default leitura, que você pode editar para incluir mais pontos na malha. Para isto você pode usar o programa exer06.calc para obter os dados do polinômio de Lagrange e depois editar o arquivo leitura para utilizar com ex0732.c. Tenha o cuidado de trocar o nome do arquivo produzido por um dos programas, que é sempre "dados" e depois edite o arquivo "transfere" para obter o gráfico com gnuplot e rode*

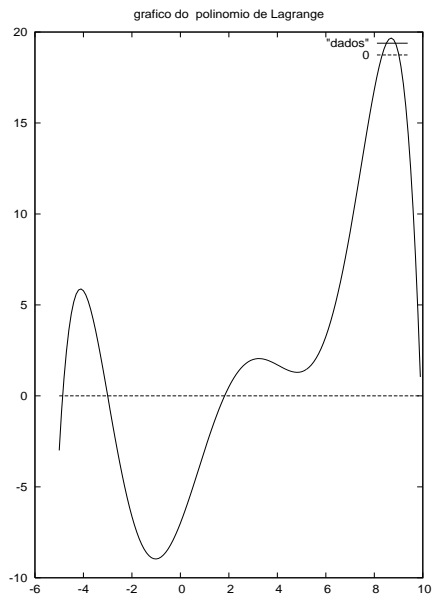


Figura 1: Polinômio de Lagrange

`gnuplot transfere`

para obter o gráfico comparativo.

Obviamente que existe um furo lógico nesta comparação, ela somente seria aceitável se acompanhassemos usando o chamado método de Lagrange com o mesmo refinamento da malha, e aqui é que podemos ver a agilidade do método com quase-splines, se refinarmos a malha de pontos para obter o chamado polinômio de Lagrange, o grau do polinômio aumenta acompanhando o número de pontos da malha e isto o vai tornar computacionalmente inefetivo, enquanto que os quase-splines continuarão com a mesma efetividade já que o grau dos pedaços continuará o mesmo, três.

### O cálculo da integral do polinômio de Lagrange

O polinômio dito de Lagrange pode ser visto como

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{y_k P_k(x)}{P'(x_k)} \quad (56)$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k P_k(x) \quad (57)$$

$$\alpha_k = \frac{y_k}{P'(x_k)} = \frac{y_k}{P_k'(x_k)} \quad (58)$$

portanto

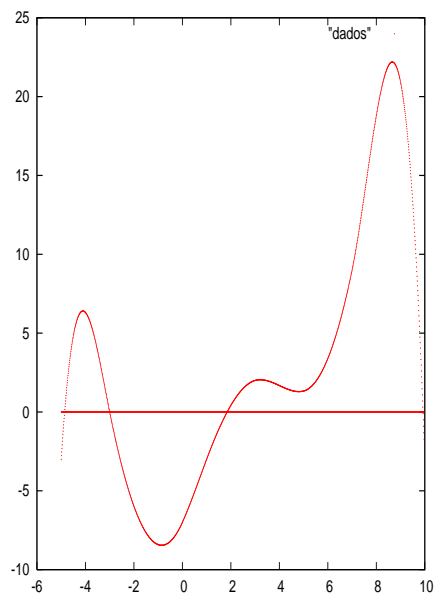


Figura 2: Gráfico comparativo quase-splines e pol de Lagrange

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^n \alpha_k \int_a^b P_k(x)dx \quad (59)$$

e aqui temos dois meios simples de calcular esta integral (aproximadamente):

- Calculamos as integrais  $\int_a^b P_k(x)dx$  e fazemos a combinação linear indicada na equação (59).
- Usamos um método de cálculo aproximado da integral diretamente com as expressões dos polinômios  $P_k$  calculando depois a combinação linear indicada na equação (59).

Para o efeito desta lista, quem tiver expresso corretamente a integral sem a efetuar, eu vou considerar “aceitável”.

A integral do polinômio dito de Lagrange, que interpola os pontos

$$(-5, -3), (-3, 0), (0, -7), (1, -3), (3, 2), (7, 9), (10, -3) \quad (60)$$

será

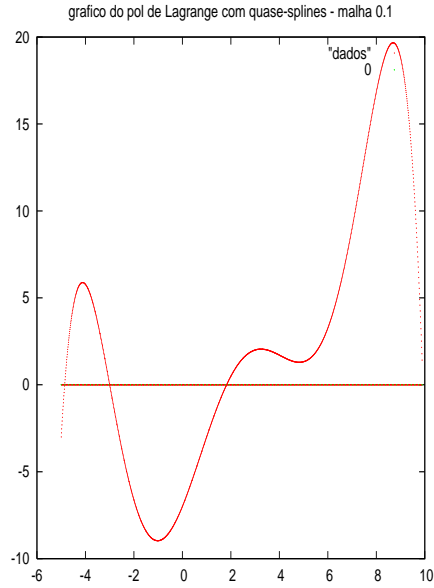


Figura 3: com uma malha mais fina, quase-splines e pol de Lagrange

$$\int_{a_1}^{a_n} f(x)dx = \sum_{k=1}^n \alpha_k P(x_k) \approx 25.10139 \quad (61)$$

com o valor de  $\alpha_k = \frac{y_k}{P_k(x_k)}$  calculado acima.

Esta integral, calculada com o programa `aproximacao.c`, usando a construção do Polinômio dito de Lagrange feita com o programa `calc` para obter os valores do polinômio no intervalo  $[-5, 10]$  com uma malha uniforme de norma 0.2 e usando derivada aproximada (quociente de diferenças) com  $\delta = 0.000001$  me deu o valor

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k P(x_k) \approx 36.08160 \quad (62)$$

Usando 0.1 como norma da malha eu obtive o valor aproximado 36.08143 para esta integral.