

aluno:

Univ. Estadual Vale do Acaraú 21 de março de 2007

Exercícios 1 *Extremos de funções e seus gráficos*

Aplicação da determinação aproximada das raízes, aplicação do diferencial total para determinação de curvas de nível (aproximadamente).

1. Derivada e extremos

Onde a derivada de uma função se anular, aí se encontram, possivelmente, os extremos (máximo ou mínimo) da função.

Considere $f(x) = \frac{\sin(x+3)}{1+x^2}$ $x \in [-10, 10]$

- (a) Calcule sua derivada e encontre os intervalos onde ela troca de sinal. Determine com um erro menor do que 0.01 as raízes da derivada.

Solução 1

$$f'(x) = \frac{\cos(x+3)(1+x^2) - 2x \sin(x+3)}{(1+x^2)^2} \quad (1)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow h(x) = \cos(x+3)(1+x^2) - 2x \sin(x+3) \quad (2)$$

$$u(x) = \sin(x+3); u'(x) = \cos(x+3) \quad (3)$$

$$v(x) = 1+x^2; v'(x) = 2x \quad (4)$$

$$f(x) = u(x)v(x) \quad (5)$$

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)v(x)} \quad (6)$$

A expressão obtida na equação 1 é mais prática para usar em cálculos manuais, enquanto que a expressão na equação (6) (derivada algébrica) é própria para ser usada em programas de computador.

Para determinação dos pontos em que $f'(x) = 0$ observe que

- p tem o mesmo sinal de x sendo negativa quando $x < 0$ e positiva quando $x \geq 0$;
- A função h é sempre negativa à esquerda da reta $x = k\pi - 3$ o período de h sendo π ela será negativa na primeira metade de cada intervalo

$$\left[k\pi - 3 - \frac{\pi}{2}, k\pi - 3 + \frac{\pi}{2}\right] = \left[(2k-1)\frac{\pi}{2} - 3, (2k+1)\frac{\pi}{2} - 3\right] \quad (7)$$

para achar estes "meios sub-intervalos" podemos fazer a média entre os extremos

$$\frac{(2k-1)\frac{\pi}{2} - 3 + (2k+1)\frac{\pi}{2} - 3}{2} = \frac{4k\frac{\pi}{2} - 6}{2} = k\pi - 3 \quad (8)$$

- para $x < 0$ a função será negativa nos intervalos

$$\left[(2k-1)\frac{\pi}{2} - 3, k\pi - 3\right] \quad (9)$$

- para $x > 0$ a função será negativa nos intervalos

$$\left[k\pi - 3, (2k+1)\frac{\pi}{2} - 3\right] \quad (10)$$

- o programa deve procurar os pontos em que $f'(x) = 0$ nestes intervalos.

Rodando o programa `exer05.01.c` que você pode encontrar na página de downloads do Curso de Matemática, [19], obtive os seguintes resultados

na parte negativa do eixo OX

```
=====
[-10.853982 , -9.283185]
Ponto de mínimo [-10.670276, -10.670266] df(-10.670276) = -0.000434
[-7.712389 , -6.141593]
Ponto de máximo [-7.454710, -7.454700] df(-7.454710) = 0.000336
[-4.570796 , -3.000000]
Ponto de mínimo [-4.142816, -4.142806] df(-4.142816) = -0.000084
[-1.429204 , 0.141593]
Ponto de máximo [-0.680058, -0.680048] df(-0.680058) = 0.000005
na parte positiva do eixo OX
=====
[0.141593 , 1.712389]
Ponto de mínimo [0.928368, 0.928378] df(0.928368) = -0.000006
[3.283185 , 4.853981]
Ponto de máximo [4.449687, 4.449697] df(4.449687) = 0.000084
[6.424778 , 7.995574]
Ponto de mínimo [7.746891, 7.746901] df(7.746891) = -0.000177
[9.566371 , 11.137167]
Ponto de máximo [10.958097, 10.958106] df(10.958097) = 0.000391
```

- (b) Encontre também com erro menor do 0.01 as raízes de f .

Solução 2 Altere o programa `exer05.01.c` para obter estas raízes.

- (c) Usando estas informações (justificamente) faça um esboço gráfico de f (a mão).

Solução 3 corrija usando o gráfico feito por Gnuplot, mas as justificativas que você oferecer é que vão indicar se você sabe resolver a questão.

(d) Compare com o gráfico feito por Gnuplot e corrija os seus cálculos se for necessário.

2. Reta secante e zeros Suponha que uma função contínua troque de sinal no intervalo $[a, b]$. Considere que x_1 é o zero da reta secante que passa nos pontos

$$(a, f(a)), (b, f(b))$$

(a) Use um gráfico e se convença de que x_1 é uma aproximação da raiz de f e justifique.

Solução 4 Como f é contínua, se $f(a)f(b) \leq 0$ então existe um ponto x ; $x \in [a, b]$; $f(x) = 0$ porque uma função contínua assume todos os valores intermediários (é isto que significa ser contínua, não dá saltos). Esta afirmação é conhecida com o nome de teorema dos valores intermediários para uma função contínua.

A negativa desta afirmação conduz à conclusão que o valor intermediário, 0 não seja assumido e portanto f não satisfaz ao teorema dos valores intermediários para uma função contínua.

Como uma reta é um gráfico de uma função contínua, e se a reta passa pelos pontos $(a, f(a)), (b, f(b))$ então ela troca de sinal no intervalo $[a, b]$ portanto tem o seu único zero neste intervalo.

Definição 1 Zero aproximado de uma função Qualquer ponto de um intervalo em que uma função f trocar de sinal é um zero aproximado de f . A medida de precisão deste zero é a medida do intervalo $b - a$. Se esta medida for grande você obteve um zero com baixa precisão.

(b) Prove que se f troca de sinal no intervalo $[a, b]$ e $x_1 \in [a, b]$ x_1 for o zero da reta secante que passa nos pontos

$$(a, f(a)), (b, f(b))$$

então uma das afirmações seguintes deve é verdadeira é verdadeira:

- f troca sinal em $[a, x_1]$
- f troca sinal em $[x_1, b]$

No caso verdadeiro verifique que nova reta secante pode ser traçada determinando assim um novo zero aproximado, chame-o x_2 .

Solução 5 Suponha a afirmação contrária:

f não troca sinal no intervalo $[a, x_1]$ e nem em $[x_1, b]$.

Então, digamos f é positiva no intervalo $[a, x_1]$ e portanto no ponto x_1 . Como f também não troca de sinal em $[x_1, b]$, então $f(b)$ tem o mesmo sinal que $f(x_1)$ que é o mesmo sinal que $f(a)$ e portanto os sinais de $f(a)$ e $f(b)$ são iguais o que contradiz a hipótese inicial.

Esta é uma demonstração por absurdo que alguns matemáticos lógicos consideram inaceitáveis... de fato elas são difíceis de serem aceitas, inicialmente.

Então um dos casos é verdadeiro:

- f troca sinal em $[a, x_1]$
- f troca sinal em $[x_1, b]$

Com isto descobrimos um intervalo de medida menor que o intervalo original, digamos $[a, x_1]$, em que f troca sinal. Aplicando o que está dito acima, por exemplo o teorema dos valores intermediários para uma função contínua, sabemos que neste novo intervalo f tem um zero aproximado, e como a medida do novo intervalo é menor, usando a definição que fizemos acima de "zero aproximado" temos agora um novo zero com melhor aproximação. É o ponto x_2 e podemos agora dizer

- $b = x_1$
- f troca sinal em $[a, x_2]$
- f troca sinal em $[x_2, b]$

Este processo conduz uma sucessão

$$x_1, x_2, \dots, x_n \tag{11}$$

em que x_i se encontra num intervalo de menor medida que x_{i-1} sendo portanto um zero com melhor aproximação que zero x_{i-1} .

Como é uma sucessão com um número infinito de termos, e limitada, então esta sucessão tem um limite (pode ter vários limites)¹.

(c) Repita o processo descrito acima para encontrar uma sucessão

$$x_3, x_4, x_5, x_6$$

de zero aproximados para f . Escreva a fórmula para x_n neste algoritmo.

Solução 6 Partimos da afirmação de que descobrimos um intervalo $[a, b]$ em que f troque de sinal. A equação da reta secante é

$$m_1 = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \tag{12}$$

$$y = f(a) + m(x - a) \overset{?}{=} 0 \Rightarrow f(a) + m(x - a) = 0 \tag{13}$$

$$x_1 = a + \frac{f(a)}{m} \tag{14}$$

$$\text{suponha que } f \text{ troque de sinal em } [a, x_1] \tag{15}$$

¹uma das razões disto é porque este método não conduz a todos os zeros que f pode ter no intervalo inicial, a sucessão tem o que chamamos um ponto de acumulação, que sendo único é o limite

$$b = x_1] \quad (16)$$

$$\text{repita o processo com } [a, b] = [a, x_1] \quad (17)$$

$$x_2 = a + \frac{f(a)}{m_2} \quad (18)$$

$$\dots \quad (19)$$

$$x_n = a + \frac{f(a)}{m_n} \quad (20)$$

$$(21)$$

Observe que as variáveis a, b adquirem novos valores em cada passagem do algoritmo. Desta forma o algoritmo deve ser escrito assim:

$$m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad (22)$$

$$y = f(a) + m(x - a) \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow f(a) + m(x - a) = 0 \quad (23)$$

$$x = a + \frac{f(a)}{m} \quad (24)$$

$$\text{seja } [a, b] \text{ o intervalo em que } f \text{ troque sinal} \quad (25)$$

$$\text{repita o processo com os novos valores de } a, b, m \quad (26)$$

$$(27)$$

(d) Descreva, de forma algorítmica (escreva um programa), o método para calcular aproximadamente uma raiz de f no intervalo $[a, b]$ usando esta sucessão de secantes e de raízes das secantes.

Solução feito na questão anterior.

(e) Use o método da secante para encontrar os zeros de f' se

$$f(x) = \text{sen}(x)/(1+x^2)$$

com erro menor do que 0.01.

Solução 7 Rodando o programa `exer05.02.c` que se encontra na página encontrei

```
[-12.566371 , -9.424778]
raiz aprox da derivada no intervalo -12.566371 -9.424778 eh -10.814216
df(-10.814216) = 0.000030
[-9.424778 , -6.283185]
raiz aprox da derivada no intervalo -9.424778 -6.283185 eh -10.814216
df(-10.814216) = 0.000030
[-6.283185 , -3.141593]
raiz aprox da derivada no intervalo -6.283185 -3.141593 eh -10.814216
df(-10.814216) = 0.000030
[-3.141593 , 0.000000]
raiz aprox da derivada no intervalo -3.141593 0.000000 eh -10.814216
df(-10.814216) = 0.000030
```

```
[0.000000 , 3.141593]
raiz aprox da derivada no intervalo 0.000000 3.141593 eh -10.814216
df(-10.814216) = 0.000030
[3.141593 , 6.283185]
raiz aprox da derivada no intervalo 3.141593 6.283185 eh -10.814216
df(-10.814216) = 0.000030
[6.283185 , 9.424778]
raiz aprox da derivada no intervalo 6.283185 9.424778 eh -10.814216
df(-10.814216) = 0.000030
[9.424778 , 12.566371]
raiz aprox da derivada no intervalo 9.424778 12.566371 eh -10.814216
df(-10.814216) = 0.000030
[12.566371 , 15.707963]
raiz aprox da derivada no intervalo 12.566371 15.707963 eh -10.814216
df(-10.814216) = 0.000030
```

3. Busca binária. Este método oferece uma alternativa poderosa ao método da secante. Na descrição feita no exercício no. 2, substitua no cálculo do zero da reta secante o ponto x_1 é o ponto médio do intervalo $[a, b]$ e sucessivamente x_1 será o ponto médio de um dos intervalos $[a, x_1]$ ou $[x_1, b]$ conforme haja troca de sinal.

Use o método de busca binária para encontrar os zeros de f' se

$$f(x) = \text{sen}(x)/(1+x^2)$$

com erro menor do que 0.01.

Solução 8 O programa `exer05.03.c` faz busca binária. Veja a diferença comparando com o programa `exer05.02.c`. Usando este programa que faz 20 iterações obtive

```
[-12.566371 , -9.424778]
raiz aprox da derivada no intervalo -12.566371 -9.424778 eh -10.814214
df(-10.814214) = -0.000195
[-9.424778 , -6.283185]
raiz aprox da derivada no intervalo -9.424778 -6.283185 eh -7.600879
df(-7.600879) = -0.000040
[-6.283185 , -3.141593]
raiz aprox da derivada no intervalo -6.283185 -3.141593 eh -4.296569
df(-4.296569) = -0.000005
[-3.141593 , 0.000000]
raiz aprox da derivada no intervalo -3.141593 0.000000 eh -0.798015
df(-0.798015) = 0.000006
[0.000000 , 3.141593]
raiz aprox da derivada no intervalo 0.000000 3.141593 eh 0.798015
```

$df(0.798015) = 0.000006$
 $[3.141593, 6.283185]$
 raiz aprox da derivada no intervalo 3.141593 6.283185 eh 4.296569
 $df(4.296569) = -0.000005$
 $[6.283185, 9.424778]$
 raiz aprox da derivada no intervalo 6.283185 9.424778 eh 7.600879
 $df(7.600879) = -0.000040$
 $[9.424778, 12.566371]$
 raiz aprox da derivada no intervalo 9.424778 12.566371 eh 10.814214
 $df(10.814214) = -0.000195$
 $[12.566371, 15.707963]$
 raiz aprox da derivada no intervalo 12.566371 15.707963 eh 13.995942
 $df(13.995942) = -0.000294$

4. Análise de algoritmo. Coloque um contador nos programas que você tiver usado para os métodos da secante e da busca binária e faça um relatório comparativo dos métodos com o número de iterações necessárias em cada método para obter a precisão estipulada. Conclua se um dos métodos é mais efetivo e justifique sua conclusão com os dados estatísticos produzidos.
5. Resolvendo $F(x, y) = c$. Considere uma função numa região retangular do plano onde ela está definida e é continuamente derivável.

- (a) Descreva como podemos fazer uma varredura desta região retangular para determinar uma família finita de soluções da equação (curva de nível) $F(x, y) = c$. Escreva o algoritmo.
- (b) Melhore o algoritmo com uma varredura fina a partir de cada intervalo onde houve uma solução afina de produzir uma solução mais precisa.
- (c) O problema $F(x, y) = c$ é uma curva de nível. Encontrada uma solução por varredura, podemos usar a equação reta dedutível do diferencial total

$$dz = 0 = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy$$

substituindo

$$m = -\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial y} \quad (28)$$

$$dx := x - a \quad (29)$$

$$dy := y - b \quad (30)$$

$$y = b + m(x - a) \quad (31)$$

em que (a, b) é uma das soluções aproximadas encontrada por varredura. Descreva como podemos calcular uma poligonal que represente

uma solução aproximada do problema $F(x, y) = c$. Veja na figura (1) página 8,

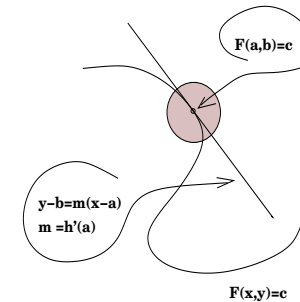


Figura 1: A reta tangente no ponto

Veja um exemplo de poligonal, com baixa aproximação na figura (2) página 8,

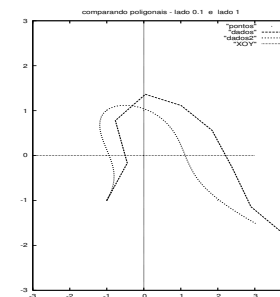


Figura 2: Poligonal - solução aproximada - curva de nível

- (d) Encontre a curva de nível (faça um gráfico)

$$x^2 + 3xy + y^3 = 5$$

Solução 9 O programa `curva_nivel02.c` que se encontra na página de downloads resolve esta questão. Leia o programa.

Referências Bibliográficas

- [1] D'Azevedo, E.F. Romine, C. H. e Walker, D. W. *Shared-Memory Emulation is key to Billion-Atom Molecular Dynamics Simulation*
- SIAM-News Vol 28 (5) - 1995
- [2] Beazley, D. M. e Lomdahl, P. S. *Large-Scale Molecular Dynamics on MPPs: Part I*
- SIAM-News Vol 28 (2) - 1995
- [3] Borwein, Jon - *NMBRTH@@LISTSERV.NODAK.EDU 28/07/1997*
WWW.CECM.SFU.CA/personal/jborwein/Kanada.50b.html
jborwein@cecm.sfu.ca
- [4] Cláudio, D. M. e Marins, J.M.
Cálculo Numérico Computacional - 1994 editora atlas - 2ª Edição
- [5] Daubechies, Ingrid, *Ten lectures on wavelets*
- SIAM - Philadelphia, PA - 1992
- [6] Dieudonné *Calcul Infinitesimal*
- 1968 - Collection Méthodes - Herman - Paris.
- [7] Eaton, John W. *Octave - A high-level interactive language for numerical computations*
1996 ftp.che.utexas.edu/pub/octave/octave-M.N.tar.gz
- [8] *Faculdade de Engenharia Mecânica - Unicamp*
<http://www.fem.unicamp.br/em313/paginas/person/lavoisie.htm>
- [9] Saunders, M e Birkhoff, G - *Algebra*
MacGraw-Hill - 1968
- [10] *Lógica* <http://plato.stanford.edu/entries/paradox-zeno>
onda http://pt.wikipedia.org/wiki/Comprimento_de_onda
- [11] Knuth, D.E. *The Art of Computer Programming, Vols 1,2.*
- Addison-Wesley-Reading Ma 1968
- [12] Lanczos, C. *Linear Differential Operators* -
Classics in Applied Mathematics - 18 - SIAM - 1996
- [13] Lang, S. *Analysis II.*
- Addison-Wesley-Reading Ma
- [14] Linz, P. *A critique of numerical Analysis.*
- Bull. of AMS vol 19 no. 2 1989 (407,416)
- [15] Meyer, Y *Wavelets Algorithms and Applications*
- SIAM - 1994
- [16] Monagan e Neuenschwander
GRADIENT. Algorithmic Differentiation in Maple.
Pre-Print - Symbolic Computation Group
Institut für Wissenschaftliches Rechnen
- ETH - Zürich - Switzerland
- [17] Marcelo P. Nunes *Tutorial para o Ensino do Cálculo*
- programa tutorial ftp.cpd.furg.br/pub/calculo - 1996-1997
- [18] Praciano-Pereira, T. *Cálculo numérico Computacional - Introdução à linguagem Pascal*
- Editora da Universidade Estadual Vale do Acaraú - 2000
- [19] *Cálculo numérico Computacional* - Edição Eletrônica
Laboratório de Matemática Computacional - 2007
<http://www.4shared.com/dir/1751707/4c187abc/sharing.html>
<http://tarcisio.wordpress.com/>
- [20] Praciano-Pereira, T. *Convolution Splines*
- 1995 submetido para publicação
- [21] Praciano-Pereira, T e Gerônimo, J.R. *Cálculo Diferencial e Integral com apoio computacional*
- Notas mimeografadas - BCE - UEM - 1991

- [22] Rossum, Guido van *A tutorial on Python*
- guido@cnri.reston.va.us - ftp.python.org.
- [23] Schumaker, L. *Spline Functions*
- 1980 John Wiley and Sons - New York.
- [24] Scilab Group - *SciLab - programa para simulações numéricas*
INRIA - Unité de recherche de Rocquencourt - Projet Meta2 - scilab@inria.fr
- 1996
- [25] Shapiro, H.S.
Smoothing and approximation of functions.

- Van Nostrand Reinhold Mathematical Studies Nr. 24 - 1970.
- [26] SIAM NEWS - *The news journal of the Society of Industrial and Applied Mathematics*
- Philadelphia, PA - USA
- [27] Simmons, G.F.
Introduction to Topology and Modern Analysis.

McGraw-Hill - Book Company - 1968
- [28] Simmons, G.F.
Differential Equations with App. and Hist. Notes.

McGraw-Hill - Book Company - 1978
- [29] *An elementary proof of the Arithmetic-Geometric Inequality* - Revista Vetur
- Univ. Federal do Rio - 2004 - Grande - Rio Grande - RS
- [30] Whaba, Grace *Spline Models for Observational data*

CBMS-NSF Regional Conference Series in App. Mathematics
- SIAM - 1990.
- [31] *A enciclopédia livre na Internet - Wikipédia*
<http://encyclopedia.thefreedictionary.com/>