Cálculo Numérico Computacional **3a. Lista**
aproximação polinomial uni e multi variada
T. Praciano-Pereira **Dep. de Matemática**
Univ. Estadual Vale do Acaraú Sobral, 8 de fevereiro de 2007

1. A seguinte tabela de dados (obtidos por um sensor) representa os valores de dois polinômios (valory_k e taxa de variação d_k (derivada)) em dois sub-intervalos subsequentes do intervalo $[-3, 3]$.

x_k	y_k	d_k
-3	1	0
0	0	-1
3	2	1

x_k são os nós da malha e y_k, d_k são, respectivamente, *o valor medido* e *a taxa de variação* (derivada) calculada em cada nó. Encontre dois polinômios do terceiro grau, P, que represesente o fenômeno no intervalo $[-3, 3]$ e faça o gráfico.

Solução 1 *Veja a solucao detalhada, com Gnuplot, quando os dados são fornecidos por uma função $f(x)$ mais abaixo, ela pode ser adaptada para este caso. Vou apresentar apenas os coeficientes dos polinômios em cada um dos sub-intervalos. Os cálculos foram feitos com um programa em* `C`.

```
## Os coeficientes calculados:
## no intervalo [ -3.00 , 0.00 ]
## a0,a1,a2,a3 -  1.000000  0.000000 -0.000000 -0.037037

## Os coeficientes calculados:
## no intervalo [ 0.00 , 3.00 ]
## a0,a1,a2,a3 -  0.000000  -1.000000 1.000000 -0.148148
```

Veja o gráfico na figura (1) página 2,

2. No gráfico da questão anterior, represente também a interpolação linear (use segmentos de reta e despreze a informação sobre a taxa de variação) dos dados levantados pelo sensor.

Solução 2 *Temos encontrar as equações das retas que passam nos pontos dados pela tabela (primeira questão). Vou usar a equação da reta quando dois pontos são dados:*

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2)\ ;\ m = \frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2} \tag{1}$$

$$(a_1, b_1) = (-3, 1), (a_2, b_2) = (0, 0); y_1 = 1 - \frac{1}{3}(x + 3) \tag{2}$$

$$(a_2, b_2) = (0, 0), (a_3, b_3) = (3, 2); y_2 = \frac{2}{3}x \tag{3}$$

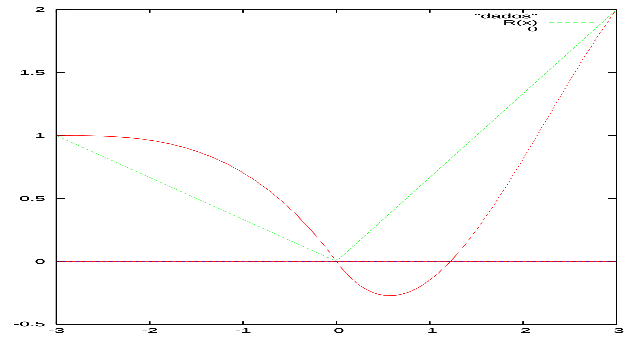

Figura 1: Interpolacao polinomial de dados

O gráfico pode ser visto na figura (1) página 2.

3. Considere $f(x) = x * sen(2 * x + 1)$ definida no intervalo [-5,5].

   (a) Calculando os valores de f e de sua derivada nos pontos $-5, \pm\sqrt{\pi}, 5$, encontre dois polinômios do terceiro grau, P_1, P_2, que coïncidam com f e tenham gráficos tangentes com o gráfico de f nos pontos indicados em cada um dos dois sub-intervalos definidos pela malha fornecida sobre $[-5, 5]$. Obtenha os gráficos de f e dos polinômios.

   Usando `Gnuplot`. O símbolo # marca uma linha de comentŕios para `Gnuplot`. Vou deixar comentadas as linhas em que estiver escrevendo as equações, que `Gnuplot` não saberia interpretar. Experimente apagar o símbolo # e colar no terminal do `Gnuplot` para ver qual é a reação do programa.

```
## P1(x) = a10 + a11*(x-a) + a12*(x-a)**2 + a13*(x-a)**3
f(x) = x*sin(2.0*x + 1.0)
df(x) = sin(2.0*x + 1.0) + 2.0*x*cos(2.0*x + 1.0)
## -----------------------------------------------------------
## Calculo de P1(x) ----------------------------------------------
a=-5.0
b=-sqrt(3.1415)
a10 = f(a)  ## = P1(a)
a11 = df(a) ## = P1'(a)
d = b-a
## P1(b) = a10 + a11*d + a12*d**2 + a13*d**3 = f(b)
## P1'(b) = a11 + 2.0*a12*d + 3.0*a13*d**2 = df(b)
##   a12*d**2 + a13*d**3 = f(b) - (a10 + a11*d)
##   2.0*a12*d + 3.0*a13*d**2 = df(b) - a11
```

```
## ---------------------------------------------------------
##   2.0*a12*d**2 + 2.0*a13*d**3 = 2.0*(f(b) - (a10 + a11*d))
##   2.0*a12*d**2 + 3.0*a13*d**3 = d*(df(b) - a11 )
## ---------------------------------------------------------
I =  d*(df(b) - a11 ) - 2.0*(f(b) - (a10 + a11*d))
a13 =  I/(d**3)
## P1'(b) = a11 + 2.0*a12*d + 3.0*a13*d**2 = df(b)
a12 = df(b) - (a11 + 3.0*a13*d**2)
a12 = a12/(2.0*d)
print a10, a11, a12, a13
## ---------------------------------------------------------
## Calculo de P2(x)  ------------------------------------------
a = -sqrt(3.1415)
b = sqrt(3.1415)
a20 = f(a)  ## = P1(a)
a21 = df(a) ## = P1'(a)
d = b-a
## P2(b) = a20 + a21*d + a22*d**2 + a23*d**3 = f(b)
## P2'(b) = a21 + 2.0*a22*d + 3.0*a23*d**2 = df(b)
##   a22*d**2 + a23*d**3 = f(b) - (a20 + a21*d)
##   2.0*a22*d + 3.0*a23*d**2 = df(b) - a21
## ---------------------------------------------------------
##   2.0*a22*d**2 + 2.0*a23*d**3 = 2.0*(f(b) - (a20 + a21*d))
##   2.0*a22*d**2 + 3.0*a23*d**3 = d*(df(b) - a21 )
## ---------------------------------------------------------
I =  d*(df(b) - a21 ) - 2.0*(f(b) - (a20 + a21*d))
a23 =  I/(d**3)
## P1'(b) = a21 + 2.0*a22*d + 3.0*a23*d**2 = df(b)
a22 = df(b) - (a21 + 3.0*a23*d**2)
a22 = a22/(2.0*d)
print a20, a21, a22, a23
## ---------------------------------------------------------
## Calculo de P3(x) ------------------------------------------
a = sqrt(3.1415)
b = 5.0
a30 = f(a)  ## = P1(a)
a31 = df(a) ## = P1'(a)
d = b-a
## P3(b) = a30 + a31*d + a32*d**2 + a33*d**3 = f(b)
## P3'(b) = a31 + 2.0*a32*d + 3.0*a33*d**2 = df(b)
##   a32*d**2 + a33*d**3 = f(b) - (a30 + a31*d)
##   2.0*a32*d + 3.0*a33*d**2 = df(b) - a31
## ---------------------------------------------------------
##   2.0*a32*d**2 + 2.0*a33*d**3 = 2.0*(f(b) - (a30 + a31*d))
##   2.0*a32*d**2 + 3.0*a33*d**3 = d*(df(b) - a31 )
## ---------------------------------------------------------
```



```
I =  d*(df(b) - a31 ) - 2.0*(f(b) - (a30 + a31*d))
a33 =  I/(d**3)
## P1'(b) = a31 + 2.0*a32*d + 3.0*a33*d**2 = df(b)
a32 = df(b) - (a31 + 3.0*a33*d**2)
a32 = a32/(2.0*d)
print a30, a31, a32, a33
## definindo os pedacos de polinomio -------------------
a1 = -5.0
P1(x) = a10 + a11*(x-a1) + a12*(x-a1)**2 + a13*(x-a1)**3

a2 = -sqrt(3.1415)
P2(x) = a20 + a21*(x-a2) + a22*(x-a2)**2 + a23*(x-a2)**3

a3 = sqrt(3.1415)
P3(x) = a30 + a31*(x-a3) + a32*(x-a3)**2 + a33*(x-a3)**3
##  ( A ? P1(x):P2(x) ) <==>  if(A) then P1(x); else P2(x)
P(x) = (x< -sqrt(3.1415))?P1(x):( (x < sqrt(3.1415))?P2(x):P3(x))

## Interpolacao linear -- poligonal ------------------------
aa1 = -5.0; bb1 = -sqrt(3.1415); m1 = (f(bb1)-f(aa1))/(bb1 - aa1)
R1(x) = f(aa1) + m1*(x-aa1)

aa2 = -sqrt(3.1415) ; bb2 = sqrt(3.1415); m2 = (f(bb2)-f(aa2))/(bb2 - aa2)
R2(x) = f(aa2) + m2*(x-aa2)

aa3 = sqrt(3.1415) ; bb3 = 5; m3 = (f(bb3)-f(aa3))/(bb3 - aa3)
R3(x) = f(aa3) + m3*(x-aa3)

R(x) = (x< -sqrt(3.1415))?R1(x):( (x < sqrt(3.1415))?R2(x):R3(x))

set pointsize 0.1
set xrange [-5:5]
## dirigindo a saida de dados para um arquivo em disco (papel) postscript
set terminal postscript portrait  color enhanced
set output "exer03.01.02.eps"  ## nome do arquivo em disco
plot P(x),f(x),0   ## a interpolacao polinomial

set terminal postscript portrait color enhanced
set output "exer03.01.03.eps"## nome do arquivo em disco
plot R(x),f(x),0   ## a interpolacao linear

set terminal postscript portrait color enhanced
set output "exer03.01.04.eps"  ## nome do arquivo em disco
plot P(x), R(x),f(x),0  ## interpolacao linear e polinomial
```

Os gráficos das interpolações lineares e polinomiais podem ser vistas nas figuras (2), página 5, (3) página 6, (4) página 7,

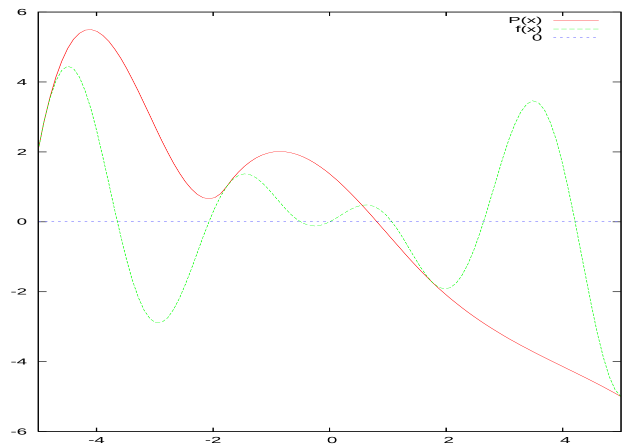

Figura 2: interpolacao polinomial de grau três

(b) Os polinômios P_1, P_2, obtidos na questão anterior, representam uma aproximação polinômial para a função f no intervalo $[-5, 5]$. Calcule o valor aproximado de f nos pontos

$$\{1, 2, 4, 5\}$$

usando esta aproximação e indique o erro cometido. Observe que f representa *a expressão exata do fenômeno.*

Solução 3

$$1 \; ; \; P2(1) = -0.356412 \; ; \; f(1) = 0.14112 \; ; \; |P2(1) - f(1)| = 0.497532 \tag{4}$$

$$2 \; ; \; P3(2) = -2.089662 \; ; \; f(2) = -1.917848 \; ; \; |P3(2) - f(2)| = 0.171814 \tag{5}$$

$$4 \; ; \; P3(4) = -4.138783 \; ; \; f(4) = 1.648473 \; ; \; |P3(4) - f(4)| = 5.787257 \tag{6}$$

$$5 \; ; \; P3(5) = -4.999951 \; ; \; f(5) = -4.999951 \; ; \; |P3(5) - f(5)| = 0.0 \tag{7}$$

4. A seguinte tabela representa (por exemplo) os preços de 5 insumos,

$$p_1, p_2, p_3, p_4, p_5$$

usados no processamento de um produto, assim como as taxas de variação dos preços destes insumos obtidos numa publicação econômica especializada:

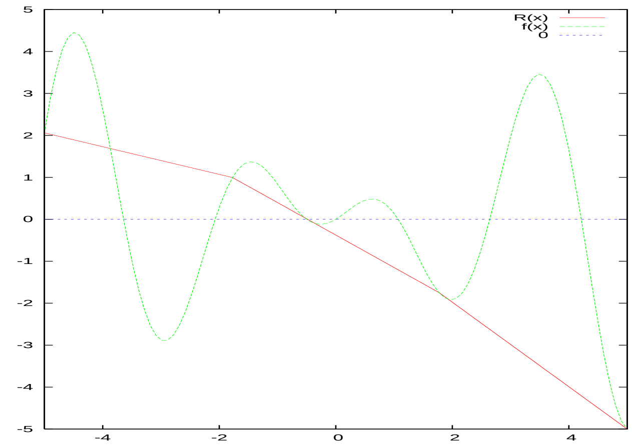

Figura 3: interpolação linear

insumo	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
valor/p_i/produto	3.4	2.5	7	3	10
tax. var.	0.1	1.2	-0.1	0.13	0.15

Observe: preço do produto no momento atual é

$$3.4 + 2.5 + 7 + 3 + 10 = 25.9$$

Calcule o preço do produto no próximo ciclo, observando que a fábrica usa a taxa de variação dos preços, mesmo que tenha os insumos em estoque. Considere para todas as variáveis $\Delta p_i = 1$ no diferencial total.

Refaça os cálculos considerando que a política do fabricante seja a de usar *taxa de variação zero* no caso do insumo p_2, porque tem este item em estoque e faça uma análise das consequências econômicas desta politica.

Solução 4 *O diferencial total é o denominação da* fórmula de Taylor *de grau 1 em várias variáveis e tanto representa um modelo para o plano tangente como da aproximação linear de uma função*

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$dz = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \tag{8}$$

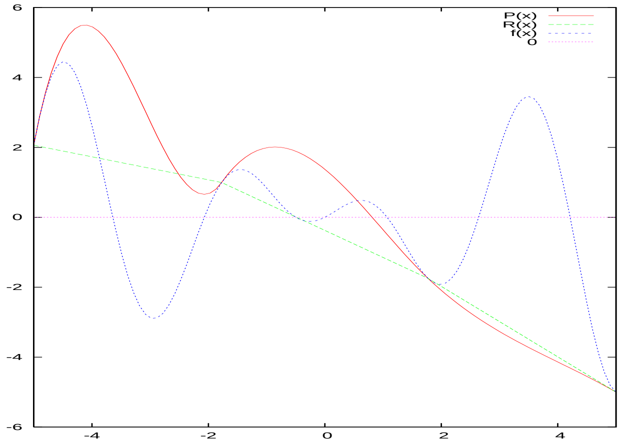

Figura 4: Comparando interpolação linear e polinomial

$$z - A = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_j - a_j) \tag{9}$$

(10)

sendo $P = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *um ponto em que as taxas de variação parciais (derivadas parciais) sejam conhecidas, e* A *'e o valor conhecido no* $P = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Aqui $A = 25.9$ *e as taxas de variação parciais são*

$$0.1, 1.2, -0.1, 0.130.15$$

relativamente a cada uma dos 5 insumos que entram no produto. O valor do produto no final do próximo ciclo econômico será:

$$z_1 = A + 0.1 * \Delta p_1 + 1.2 * \Delta p_2 - 0.1 * \Delta p_3 + 0.13 * \Delta p_4 + 0.15 * \Delta p_5 = 25.9 + 1.48 = 27.38$$

considerando $\Delta p_i = 1$ *para todo* i.

No caso de considerar a taxa de variação do insumo p_2 *nulo, por haver este insumo em estoque, torna*

$$\frac{\partial f}{\partial p_2} = 0$$

reduzindo a soma total a 26.18