

Cálculo Numérico Computacional Exercícios

fórmula de Taylor

T. Praciano-Pereira

Dep. de Matemática

Univ. Estadual Vale do Acaraú

Sobral, 23 de janeiro de 2007

Fórmula de Taylor A equação da reta tangente

$$y = f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) = b + m(x - a) \quad (1)$$

é a equação de um polinômio do primeiro grau tangente ao gráfico de f . Observe que a equação (1) é a equação de um polinômio desenvolvido no ponto $\underline{x = a}^1$. Descubrimos b e m impondo as condições:

- $b = f(a)$
- $m = f'(a)$

Mas explorar este método nesta lista de exercícios.

1. Encontre a equação de uma parábola (polinômio do segundo grau) tangente ao gráfico de f *memorizando* também a curvatura (segunda derivada)

$$y = A + B(x - a) + C(x - a)^2 \quad (2)$$

em que, como no caso anterior, temos na equação (2) um polinômio desenvolvido² no ponto $\underline{x = a}$.

Descreva as equações para determinarmos os coeficientes A, B, C .

2. Fórmula de Taylor Encontre a equação de um polinômio do terceiro grau que coincida com f até na terceira derivada:

$$y = A + B(x - a) + C(x - a)^2 + D(x - a)^3 \quad (3)$$

Descreva as equações para determinarmos os coeficientes A, B, C, D .

3. Derivadas parciais Considere uma função

$$z = f(x, y) \quad (4)$$

que seja derivável numa vizinhança do ponto $(a, b, f(a, b))$. Então ela tem um plano tangente no ponto $(a, b, f(a, b))$, semelhante ao caso da função univariada com a reta tangente. Encontre a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(a, b, f(a, b))$.

4. Fórmula de Taylor multivariada de grau 1 Observe que a equação do plano tangente pode ser escrita de forma semelhante à equação da reta tangente. Encontre as semelhanças e escreva a *fórmula de Taylor multivariada de grau 1*. Você vai precisar de um produto de matrizes (já ouviu falar do Gradiente, da Jacobiana?).

¹Discuta com o professor (ou com os seus colegas) o que é *um polinômio desenvolvido no ponto $\underline{x = a}$*

²novamente, um polinômio desenvolvido no ponto $\underline{x = a}$

5. Fórmula de Taylor

- (a) Ache o desenvolvimento de Taylor para $f(x) = \text{sen}(x)$ no ponto $\underline{x = 0}$ de ordem 7 (grau 7).
- (b) Ache o desenvolvimento de Taylor para $g(x) = \text{cos}(x)$ no ponto $\underline{x = 0}$ de ordem 7 (grau 7).
Calcule a derivada de $g(x) + if(x)$. Será que o resultado poderia ser interpretado como sendo

$$(g(x) + if(x))' = i(g(x) + if(x))$$

6. Aplicações

- (a) Calcule o valor aproximado de $\text{sen}(0.1)$ usando a fórmula de Taylor de ordem 7.
- (b) Calcule o valor aproximado de $\text{cos}(0.1)$
- (c) Sabendo que as taxas de variação parciais de $z = f(x, y)$ no ponto $(1, 2)$ são

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2; \frac{\partial f}{\partial y} = 3$$

e que $f(1, 2) = -5$ calcule aproximadamente

$$f(1.1, 2.1)$$

7. Polinômio Podemos encontrar um polinômio que memoriza as informações de uma função de forma parecida com o polinômio de Taylor, mas usando informações em dois pontos. Encontre um polinômio P desenvolvido no ponto $\underline{x = a}$ tal que

- $P(a) = f(a); P'(a) = f'(a)$
- $P(b) = f(b); P'(b) = f'(b)$

em que $[a, b]$ é um intervalo em que f está definida e é derivável. Sugestão: escreva a expressão de um polinômio desenvolvido no ponto $\underline{x = a}$.

8. Aplicação Encontre um polinômio tal que

- $P(-3) = 3; P'(-3) = -1$
- $P(0) = -3; P'(0) = 1$

Faça o gráfico deste polinômio.