Cálculo Numérico Computacional	**Exercícios**
fórmula de Taylor	
T. Praciano-Pereira	**Dep. de Matemática**
Univ. Estadual Vale do Acaraú	Sobral, 27 de fevereiro de 2007

Relembrando: Fórmula de Taylor A equação da reta tangente

$$y = f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) = b + m(x-a) \tag{1}$$

é a equação de um polinômio do primeiro grau tangente ao gráfico de f. Observe que a equação (1) é a equação de um polinômio desenvolvido no ponto $\underline{x = a}$[1]. Descobrimos b e m impondo as condições:

- $b = f(a)$
- $m = f'(a)$

Vamos explorar este método nesta lista de exercícios.

1. Encontre a equação de uma parábola (polinômio do segundo grau) tangente ao gráfico de f *memorizando* também a curvatura (segunda derivada)

$$y = A + B(x-a) + C(x-a)^2 \tag{2}$$

em que, como no caso anterior, temos na equação (2) um polinômio desenvolvido[2] no ponto $\underline{x = a}$.

Descreva as equações para determinarmos os coeficientes $\underline{A, B, C}$.

Solução 1 *Por hipótese conhecemos uma função $y = f(x)$ da qual conhecemos $f(a), f'(a), f''(a)$ em que $\underline{a}$ é um ponto do domínio desta função Queremos encontrar*

$$P(x) = A + B(x-a) + C(x-a)^2 \tag{3}$$

tal que

$$P(a) = f(a)\ ;\ P'(a) = f'(a)\ ; P''(a) = f''(a) \tag{4}$$

Temos portanto três equações que vão nos permitir encontrar as três incognitas A, B, C, os coeficientes de P. Desenvolvendo temos

$$P(a) = A = f(a) \tag{5}$$

$$P'(a) = B = f'(a) \tag{6}$$

$$P''(a) = 2C = f''(a) \ \Rightarrow\ C = \tfrac{f''(a)}{2} \tag{7}$$

O polinômio é

$$P(x) = A + B(x-a) + C(x-a)^2 = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 \tag{8}$$

[1] Discuta com o professor (ou com os seus colegas) o que é *um polinômio desenvolvido no ponto* $\underline{x = a}$

[2] novamente, um polinômio desenvolvidono ponto $\underline{x = a}$

2. Fórmula de Taylor Encontre a equação de um polinômio do terceiro grau que coïncida com f até na terceira derivada:

$$y = A + B(x-a) + C(x-a)^2 + D(x-a)^3 \tag{9}$$

Descreva as equações para determinarmos os coeficientes $\underline{A, B, C, D}$.

Solução 2 *O método é semelhante ao da questão anterior, apenas com uma equação a mais porque agora temos que encontrar um polinômio do terceiro grau. A resposta é (eu não aceito apenas a resposta)*

$$P(x) = A + B(x-a) + C(x-a)^2 + D(x-a)^3 = \tag{10}$$

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \tfrac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \tfrac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 \tag{11}$$

3. Derivadas parciais Considere uma função

$$z = f(x, y) \tag{12}$$

que seja derivável numa vizinhança do ponto $(a, b, f(a, b))$. Então ela tem um plano tangente no ponto $(a, b, f(a, b))$, semelhante ao caso da função univariada com a reta tangente. Encontre a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(a, b, f(a, b))$.

Solução 3 *A derivada implicita é o modelo da equação do plano tangente*

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \tag{13}$$

A equação (13) é chamada de diferencial total e representa uma forma linear nas variáveis dx, dy, dz da qual podemos deduzir o plano tangente em qualquer ponto (a, b) do domínio de f onde ela seja derivável Se fizermos as substituições

$$dz := z - c = z - f(a, b) \tag{14}$$

$$dy := y - b \tag{15}$$

$$dx := x - a \tag{16}$$

na equação (13) teremos a equação do plano tangente no ponto $(a, b, f(a, b)) = (a, b, c)$

$$z - c = \frac{\partial f}{\partial x}(a-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(y-b) \tag{17}$$

A equação (17) é a expressão geral do plano tangente ao gráfico de uma função, no ponto $(a, b, f(a, b)) = (a, b, c)$.

4. <u>Fórmula de Taylor multivariada de grau 1</u> Observe que a equação do plano tangente pode ser escrita de forma semelhante à equação da reta tangente. Encontre as semelhanças e escreva a *fórmula de Taylor multivariada de grau 1.* Você vai precisar de um produto de matrizes (já ouviu falar do Gradiente, da Jacobiana ?).

Solução 4 *A expressão do plano tangente, obtida na equação (17), pode ser escrita numa forma semelhante à fórmula de Taylor.*

Seja $z = f(x, y)$ *uma função diferenciável num vizinhança de um ponto* (a, b) *e seja* $(a, b, c) = (a, b, f(a, b))$*. Então neste ponto existe um plano tangente (porque* f *é diferenciável) e temos:*

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \tag{18}$$

$$z - c = \frac{\partial f}{\partial x}(a - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - b) \tag{19}$$

$$z - f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - b) \tag{20}$$

$$z = P(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - b) \tag{21}$$

$$z = P(x, y) = f(a, b) + \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} \tag{22}$$

$$z = g(x, y) = f(a, b)D(f)|_{(a,b)} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} \tag{23}$$

Na equação (18) calculamos a derivada implícita de $z = f(x, y)$ *e na (19) fizemos a substituição*

$$dz := z - c \tag{24}$$

$$dx := x - a \tag{25}$$

$$dy := y - b \tag{26}$$

conseguindo assim na equação (20) a equação de um plano, que é o plano tangente ao gráfico de f *no ponto* $(a, b, f(a, b)) = (a, b, c)$*.*

Na equação (21) escrevemos a equação de um polinômio do primeiro grau em x, y*, que é a própria equação do plano, que está expressa matricialmente nas equações (22), (23). Observe que se designarmos*

$$A = (a, b) \tag{27}$$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \tag{28}$$

$$X = (x, y) \tag{29}$$

então podemos expressar a fórmula de Taylor de forma bem parecido com o caso univariado

$$z = P(X) = f(A) + \mathcal{A}(X - A)^t \tag{30}$$

5. <u>Fórmula de Taylor</u>

   (a) Ache o desenvolvimento de Taylor para $f(x) = sen(x)$ no ponto $\underline{x = 0}$ de ordem 7 (grau 7).

   (b) Ache o desenvolvimento de Taylor para $g(x) = cos(x)$ no ponto $\underline{x = 0}$ de ordem 7 (grau 7).

   Calcule a derivada de $g(x) + if(x)$. Será que o resultado poderia ser interpretado como sendo

$$(g(x) + if(x))' = i(g(x) + if(x))$$

Solução 5 *(a) Precisamos das derivadas de* $f(x) = sen(x)$*, na origem que são*

$$0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1$$

em que o primeiro coeficiente corresponde a $f(0)$ *a derivada de ordem zero, e os demais são as derivadas sucessivas. O desenvolvimento de Taylor na origem será então*

$$P(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \tag{31}$$

(b) Veja o gráfico do desenvolvimento de Taylor do seno na figura (fig. 1) página 4, O gráfico foi obtido com `Gnuplot` *com os comandos Veja*

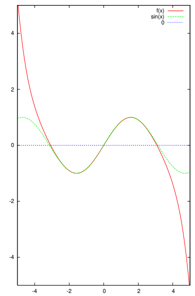

Figura 1: Desenv. do seno de ordem 7 na origem

na figura (fig. 2) página 5,

(c) Precisamos das derivadas de $g(x) = cos(x)$*, na origem que são*

$$1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1$$

```
P(x) = x - x**3/6.0 + x**5/120.0  - x**7/5040.0
set xrange [-5:5]
set yrange [-5:5]
plot f(x), sin(x), 0
set term postscript portrait color enhanced
set output ''exer02.01.01.eps''
plot P(x), sin(x), 0
```

Figura 2: Comandos do Gnuplot - desenvol do seno na origem

em que o primeiro coeficiente corresponde a $g(0)$ a derivada de ordem zero, e os demais são as derivadas sucessivas. O desenvolvimento de Taylor na origem será então

$$Q(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} \tag{32}$$

Veja o gráfico do desenvolvimento do coseno, na origem, na figura (fig. 3) página 5,

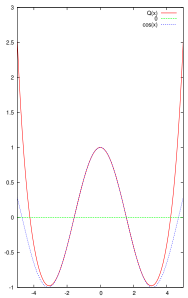

Figura 3: Desenvo. do coseno na origem

Os comandos do `Gnuplot` *para obter este gráfico são Veja na figura (fig. 4) página 6,*

(d) *Somando as duas expressões, dos desenvolvimentos do seno e do coseno no ponto $\underline{x = 0}$, que se encontram nas equações (31), (32) temos*

$$Q(x) + iP(x) \approx cos(x) + isen(x) \tag{33}$$
$$sen(x) \approx P(x) = x - \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} - \tfrac{x^7}{7!} \tag{34}$$
$$cos(x) \approx Q(x) = 1 - \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^4}{4!} - \tfrac{x^6}{6!} + \tfrac{x^8}{8!} \tag{35}$$

```
Q(x) = 1 - x**2/2.0 + x**4/24.0 - x**6/720.0 + x**8/40320.0
set xrange [-5:5]
plot Q(x),0,cos(x)
set term postscript portrait enhanced color
set output "exer02.01.02.eps"
plot Q(x),0,cos(x)
```

Figura 4: comandos do Gnuplot - dessenvol. do coseno na origem

$$\tfrac{d}{dx}(Q(x) + iP(x)) = Q'(x) + iP'(x) = i(P'(x) - iQ'(x)) \tag{36}$$
$$Q'(x) = -x + \tfrac{x^3}{3!} - \tfrac{x^5}{5!} + \tfrac{x^7}{7!} \tag{37}$$
$$P'(x) = 1 - \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^4}{4!} - \tfrac{x^6}{6!} + \tfrac{x^8}{8!} \tag{38}$$
$$sen(x) \approx -Q'(x) = x - \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} - \tfrac{x^7}{7!} \tag{39}$$
$$cos(x) \approx P'(x) = 1 - \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^4}{4!} - \tfrac{x^6}{6!} + \tfrac{x^8}{8!} \tag{40}$$
$$\tfrac{d}{dx}(P(x) + iQ(x)) = \tfrac{d}{dx}(cos(x) + isen(x)) = \tag{41}$$
$$i(P'(x) - iQ'(x)) = i(cos(x) + isen(x)) \tag{42}$$
$$\tfrac{d}{dx}f(x) = if(x) \tag{43}$$

A equação (43) resumo o conjunto de equações, em que temos uma função cuja derivada é o produto de uma constante por ela mesma. A única função com esta propriedade é a exponencial o que levou Euler a escrever a sua célebre fórmula

$$\textit{fórmula de Euler } e^{ix} = (cos(x) + isen(x)) \tag{44}$$

6. Aplicações

Solução 6 *(a) Calcule o valor aproximado de $sen(0.1)$ usando a fórmula de Taylor de ordem 7.*

```
print P(0.1)
0.0998334166468254
print sin(0.1)
0.0998334166468282
print P(0.2)
0.198669330793651
print sin(0.2)
0.198669330795061
print P(0.5)
0.479425533234127
print sin(0.5)
0.479425538604203
```

```
print P(2)
0.907936507936508
print sin(2)
0.909297426825682
print P(4)
-1.38412698412698
print sin(4)
-0.756802495307928
```

(b) *Calcule o valor aproximado de* $cos(0.1)$

```
print cos(0.1)
0.995004165278026
print Q(0.1)
0.995004165278026
print Q(0.2)
0.98006657784127
print cos(0.2)
0.980066577841242
print cos(0.5)
0.877582561890373
print Q(0.5)
0.877582562158978
print Q(2)
-0.415873015873016
print cos(2)
-0.416146836547142
print cos(4)
-0.653643620863612
print Q(4)
-0.396825396825398
```

(c) *Sabendo que as taxas de variação parciais de* $z = f(x,y)$ *no ponto* $(1,2)$ *são*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2; \frac{\partial f}{\partial y} = 3$$

e que $f(1,2) = -5$ *calcule aproximadamente*

$$f(1.1, 2.1)$$

Vamos calcular a equação do plano tangente no ponto onde conhecemos $f(a,b), \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ *que é o ponto* $(a,b) = (1,2)$ *para encontrar um valor aproximado da função numa vizinhança deste ponto.*
Da equação do plano tangente temos (fórmula de Taylor)

$$P(x,y) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}|_{(1,2)}(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}|_{(1,2)}(y-2) \quad (45)$$
$$P(x,y) = -5 + 2(x-1) + 3(y-2) \quad (46)$$

$$f(1.1, 2.1) \approx P(1.1, 2.1) = -5 + 2(1.1-1) + 3(2.1-2) = \quad (47)$$
$$-5 + 0.2 + 0.3 = -4.5 \quad (48)$$

Vamos ver um exemplo, com uma função conhecida para avaliarmos a validade desta aproximação.

```
f(x,y) = x**2 - 3*x*y + y**2
dfx(x,y) = 2*x - 3*y
dfy(x,y) = -3*x + 2*y
P(x,y) = f(1,2) + dfx(1,2)*(x-1) + dfy(1,2)*(y-2)
print f(1.1,2.1)
-1.31
print P(1.1,2.1)
-1.3
set zrange [-5:5]
set xrange [-3:3]
set yrange [-3:3]
splot f(x,y) , P(x,y)
```

7. Polinômio Podemos encontrar um polinômio que memoriza as informações de uma função de forma parecida com o polinõmio de Taylor, mas usando informações em dois pontos. Encontre um polinômio P desenvolvido no ponto $x = a$ tal que

- $P(a) = f(a); P'(a) = f'(a)$
- $P(b) = f(b); P'(b) = f'(b)$

em que $[a,b]$ é um intervalo em que f está definida e é derivável. Sugestão: escreva a expressão de um polinômio desenvolvido no ponto $x = a$.

Solução 7

$$P(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 \quad (49)$$
$$P(a) = a_0 = f(a) \quad (50)$$
$$P'(a) = a_1 = f'(a) \quad (51)$$
$$P(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + a_2(b-a)^2 + a_3(b-a)^3 = f(b) \quad (52)$$
$$P'(b) = f'(a) + 2a_2(b-a) + 3a_3(b-a)^2 = f'(b) \quad (53)$$
$$\text{——————————————————} \quad (54)$$
$$2f(a) + 2f'(a)(b-a) + 2a_2(b-a)^2 + 2a_3(b-a)^3 = 2f(b) \quad (55)$$
$$f'(a)(b-a) + 2a_2(b-a)^2 + 3a_3(b-a)^3 = f'(b)(b-a) \quad (56)$$
$$\text{——————————————————} \quad (57)$$
$$2f(a) + f'(a)(b-a) - a_3(b-a)^3 = 2f(b) - f'(b)(b-a) \quad (58)$$
$$a_3 = -\frac{2f(b) - f'(b)(b-a) - 2f(a) - f'(a)(b-a)}{(b-a)^3} \quad (59)$$
$$a_2 = \frac{f(b) - (f(a) + f'(a)(b-a) + a_3(b-a)^3)}{(b-a)^2} \quad (60)$$

8. <u>Aplicação</u> Encontre um polinõmio tal que

a) $P(-3) = 3$	$P'(-3) = -1$	b) $P(-3) = -3$	$P'(-3) = 1$
$P(3) = 1$	$P'(3) = 1$	$P(3) = -3$	$P'(3) = 1$

Faça o gráfico destes polinômio.

Solução 8 *Vamos aplicar os cálculos feitos no Gnuplot.*

(a)

a) $P(-3) = 3 = f(-3)$	$P'(-3) = -1 = f'(-3)$
$P(3) = 1 = f(3)$	$P'(3) = 1 = f'(3)$

```
a = -3
b = 3
delta = b - a
a0 = 3
a1 = -1
a3 = - (2.0 -6.0  - 2*3 + 6.0)/6**3
print a3
0.0185185185185185
a2 = (1 - (3 -6 + a3*6**3) )/6**2
print a2
0.0
P(x) = a0 + a1*(x + 3) + a2*(x + 3)**2 + a3*(x + 3)**3
plot P(x),0
set xrange [-3:3]
plot P(x),0
```