Cálculo Numérico Computacional **Exercícios**
Revisão do Cálculo e Geometria

T. Praciano-Pereira **Dep. de Matemática**
Univ. Estadual Vale do Acaraú Sobral, 24 de janeiro de 2007

1. Equação da reta que passa num ponto

(a) Escreva a equação da reta que passa no (a, b) e tem coeficiente angular m.

Solução 1 *A equação da reta que passa no (a, b) com o coeficiente angular dado, m, é*

$$y - b = m(x - a)$$

(b) aplicação Escreva as equações das retas que passam no (a, b) com o coeficiente angular indicado, em cada item abaixo:

Solução 2

(a,b)	m	*y - b = m(x - a)*
$(-1,3)$	-3	*y - 3 = -3(x + 1)*
$(-1,3)$	-1	*y - 3 = -(x + 1)*
$(-1,3)$	1	*y - 3 = (x + 1)*
$(-1,3)$	2	*y - 3 = 2(x + 1)*

(c) Escreva a equação da reta que passa nos pontos $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$.

Solução 3 *Com os dois pontos dados podemos calcular o coeficiente angular da reta que não foi fornecido,*

$$m = \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}$$

observando a ordem como ordenadas e abcissas *dos pontos foram selecionados o que garante o sinal correto do* coeficiente angular.
A equação procurada é

$$y - b = m(x - a)$$

Observe que não devo expandir o valor de m, ele está definido pela expressão anterior e estamos num curso de Cálculo Numérico Computacional *o que significa que temos por objetivo produzir as expressões que um computador* possa entender *dentro de um programa.*
A nossa habilidade calculatória deve ser dirigida para escrever as expressões que um programa não saberia desenvolver. O que um programa puder fazer, nós deixaremos que ele faça.
Se escrevermos, num programa, nesta ordem:

$$\begin{aligned} &\textit{dados } a_1, a_2, b_1, b_2 && (1)\\ &m = \tfrac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1} && (2)\\ &y - b = m(x - a) && (3)\\ &y = f(x) = b + m(x - a) && (4)\\ &x = 3; && (5)\\ &\textit{print } f(3); && (6) \end{aligned}$$

o resultado desta sequência é $y = f(3)$, o valor de y quando $x = 3$.
Veja o exemplo

```
a1 = 7
a2 = 3
b1 = 5
b2 = -2
m = (b2 - b1)/(a2 - a1)
f(x)  =   b1 + m*(x - a1)
x = 3
print f(x)
plot f(x), 0
```

Usei `Gnuplot` *que é um programa de domínio público que pode ser obtido no endereço*
`http://www.gnuplot.info`

(d) aplicação Escreva as equações das retas que passam nos pontos indicados em cada um dos itens abaixo:

(a_1, b_1)	(a_2, b_2)	(a_1, b_1)	(a_2, b_2)
$(-1,3)$	$(1,-3)$	$(1,-3)$	$(-3,1)$
$(-1,3)$	$(3,3)$	$(1,3)$	$(-2,5)$

Solução 4 *Este exercício pode ser resolvido com o* `script` *que já usei acima, para* `Gnuplot`*, colocando os valores de $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ cada vez que você* rodar *o* `script`.

Mas `Gnuplot` *não sabe escrever equações. Isto nós podemos ensinar-lo a fazer. Mas seria um uso da ferramenta errada, no mínimo. Aqui o ideal é usar uma linguagem de programação um pouco mais evoluida, ou pelo menos mais dirigida para o objetivo desejado.*

`Gnuplot` *é uma ferramenta apropriada para fazer gráficos. Depois de escrita a equação com uma linguagem apropriada, podemos chamar* `Gnuplot` *para fazer os gráficos, e assim você está vendo o uso iterativo de diversas (duas, neste caso), ferramentas de computação.*

Veja o programa `equacoes_p_01.c`*, ele tem alguns defeitos que ficam para o estudante corregir, por exemplo, não há uma preocupação com escrever* *expressões algébricas formalmente bonitas. Ele pode escrever coisas do tipo*

$$y = -4 - -8(x - -4)$$

em vez de escrever

$$y = -4 + 8(x + 4)$$

Com alguns `se()` *você pode melhor o programa e eu agradeceria o envio do programa melhorado.*

2. Reta tangente ao gráfico de uma função Fórmula de Taylor. A derivada de uma função nos fornece o coeficiente angular instantâneo da mesma no ponto:

   $f'(a)$ é o coeficiente angular instantâneo de f em $(a, f(a))$

   (a) Fórmula de Taylor - equação da reta Escreva a equação da reta que passa no $(a, f(a))$ e é tangente ao gráfico da função neste ponto. Observe que você deseja a equação da reta que passa no onto $(a, f(a))$, com coeficiente angular $f'(a)$. Faça um gráfico genérico mostrando o que acontece.

   (b) Aplicação - derivada algorítmica Para cada item abaixo faça o gráfico da função e da reta tangente no ponto $(a, f(a))$ indicado:

$f(x) = (x+3)(x-4)$	$a = -3$
$f(x) = (x+3)(x-4)$	$a = 4$
$f(x) = (x+3)(x-4)$	$a = 0.5$
$f(x) = sin(x)(x+1)$	$a = -4$
$f(x) = sin(x)(x-1)(x-5)$	$a = -2$
$f(x) = cos(x)(x+3)(x-4)$	$a = 0.5$

Solução 5 *A equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$ é*

$$y - b = m(x - a) \text{ equação da reta passando por } (a, b) \tag{7}$$

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \tag{8}$$

$$y = f(a) + f'(a)(x - a) \text{ fórmula de Taylor de grau 1} \tag{9}$$

Podemos obter a solução dos demais itens desta questão com `Gnuplot`. *Vejamos um primeiro* `script` *(basta copiá-lo para uma área de trabalho do* `Gnuplot`*) .*


```
f(x) =  sin(x)*(x+1)
df(x) = sin(x) + cos(x)*(x+1)
a = -3
reta(x) = f(a) + df(a)*(x - a)
plot f(x), reta(x),0
pause -2
```

Observe que `Gnuplot` *não sabe derivar e assim temos que lhe ensinar qual é a derivada de $f(x)$ aqui expressa como $df(x)$ uma vez que notação matemática é inadequada, dentro de um programa.*

3. Derivada aproximada O quociente

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \approx f'(a) \tag{10}$$

   é uma *aproximação* do valor da derivada de f no ponto $x = a$ quando Δx for *pequeno*. Os próximos itens servem para que você *desenvolva a sua intuição* com respeito a esta *aproximação*, faça gráficos bem feitos que permitam você se convencer do *seu* significado, a precisão como que os gráficos serão feitos é parte essencial da questão, um gráfico mal feito nada lhe indicará, use papel quadriculado (ou milimetrado).

4. Considere $f(x) = x^2 - 2x - 3$

   (a) Encontre a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1, f(1))$. Faça o gráfico.

   (b) Use $\Delta x = 0.2$, calcule o valor aproximado da derivada com este erro, e obtenha a equação da reta "*tangente*" no ponto $(1, f(1))$. Faça o gráfico.

   (c) Use $\Delta x = 0.05$, calcule o valor aproximado da derivada com este erro, e obtenha a equação da reta "*tangente*" no ponto $(1, f(1))$. Faça o gráfico.

Solução 6 *Vou fazer aqui uso de um programa em* `C` *que vai se comunicar com* `Gnuplot` *para lhe repassar uma equação cujo gráfico vamos ver. A linguagem* `C` *não tem comandos que nos permitam calcular derivadas de funções, de modo que, como fizemos em questão anterior, vamos* ensinar *o programa a calcular derivadas aproximadas usando o quociente de diferenças, eq. (10). Rode e leia o programa* `derivada_aprox.c`*. O programa gera um arquivo com comandos para o Gnuplot,* `transfere`*. Você pode repetir as experiências e inclusive alterá-las, editando este arquivo e depois rodando*

`gnuplot transfere`

O efeito da escolha de Δx mostra, mais claramente, quando o valor de Δx é muito grande, que vamos obter uma secante, em vez de uma tangente, quando usarmos derivada aproximada. *Para valores muito pequenos de Δx isto pode ficar desapercebido.*

5. Com $f(x) = x^2 - 2x - 3$ e encontre a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(-3, f(-3))$. Complete o gráfico anterior.

   (a) Use $\Delta x = 0.2$, calcule o valor aproximado da derivada com este erro, e obtenha a equação da reta "*tangente*" no ponto $(1, f(1))$. Complete os gráficos anteriores.

   (b) Use $\Delta x = 0.05$, calcule o valor aproximado da derivada com este erro, e obtenha a equação da reta "*tangente*" no ponto $(1, f(1))$. Complete os gráficos anteriores.

   solução Rode o programa `derivada_aprox.c` ou, se já o tiver rodado, edite o arquivo `transfere` para obter o gráfico. Se desejar obter o gráfico em papel, rode o programa `derivada_aprox.c` e escolha a opção *gráfico em papel* que o programa irá o comando apropriado para o Gnuplot gravar o gráfico em um formato adequado.

6. Considere $f(x) = x^2 - 9$

   (a) Encontre as equações das retas tangentes ao gráfico de f nos pontos

   $$(-4, f(-4)), (-3, f(-3)), (0, f(0))$$

   Faça os gráficos.

   (b) Use $\Delta x = 0.05$, calcule o valor aproximado da derivada com este erro, e obtenha a equação da reta "*tangente*" nos pontos

   $$(-4, f(-4)), (-3, f(-3)), (0, f(0))$$

   Complete os gráficos anteriores.

   solução Rode o programa `derivada_aprox.c` ou, se já o tiver rodado, edite o arquivo `transfere` para obter o gráfico. Se desejar obter o gráfico em papel, rode o programa `derivada_aprox.c` e escolha a opção *gráfico em papel* que o programa irá o comando apropriado para o Gnuplot gravar o gráfico em um formato adequado.

7. Significado da derivada Considere a função $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$

   (a) Calcule a derivada f'.

   (b) Encontre as raízes de f' e deduza os pontos extremos relativos f

   (c) Faça um esboço do gráfico de f

   Solução 7

   $$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2 \tag{11}$$

   $$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \equiv x^2 - 2x - 3 = 0 = (x-3)(x+1) \tag{12}$$

   $$f(-1) = 7; f(3) = -25 \tag{13}$$

   O esboço do gráfico de f, f' pode ser visto na figura (fig. 1) página 6,

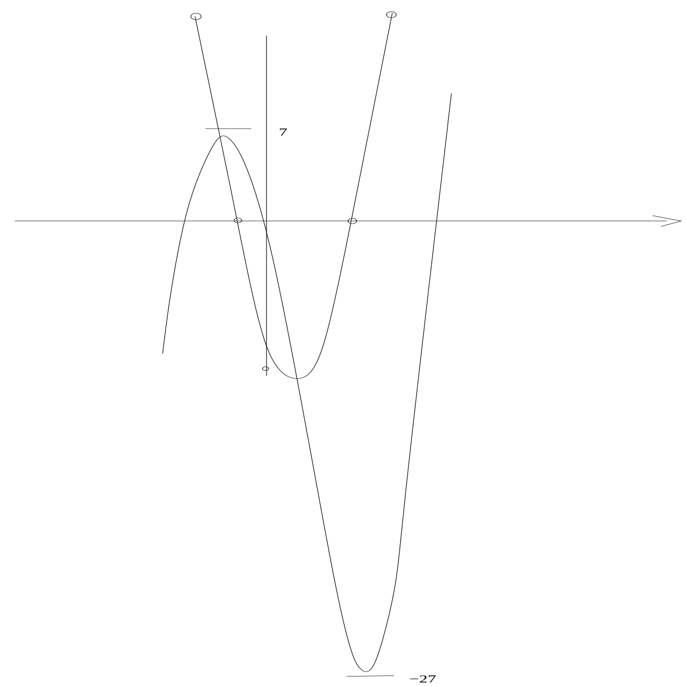

Figura 1: Derivada e função